



SECTION DE GÉNIE MÉCANIQUE

MASTER SEMESTRE 1

TURBOMACHINES HYDRAULIQUES

BILANS D'ENERGIE MASSIQUE DANS LES CIRCUITS HYDRAULIQUES

PROF. FRANÇOIS AVELLAN

TABLE DES MATIERES

I	BILAN D'ÉNERGIE MASSIQUE DANS LES CIRCUITS HYDRAULIQUES	5
1	Conservation de la masse	5
1.1	Débit	5
	Equation de continuité.....	5
	Bilan de masse appliqué un tronçon de conduite.....	5
	Conservation du débit.....	6
	Remarque :	6
1.2	Conservation du débit au nœud d'une tri-jonction	7
1.3	Vitesse débitante	7
1.4	Cas d'une conduite de section circulaire	8
2	Energie massique	8
2.1	Définition.....	8
2.2	Energie cinétique massique d'une particule dans son mouvement moyen.....	8
	Composantes moyennes et fluctuantes	8
	Equation de continuité.....	9
	Equation de Reynolds.....	9
	Tenseur des contraintes totales	10
	Equation de conservation d'énergie cinétique locale	11
	Dissipation interne de puissance et flux net des efforts extérieurs	12
	Contribution des termes d'énergie potentielle massique au flux de puissance massique (efforts extérieurs).....	13
	Contribution des termes d'énergie potentielle massique à la dissipation massique (efforts intérieurs)	13
2.3	Dissipation de puissance du mouvement moyen	14
	Dissipation de puissance massique par la viscosité.....	14
	Dissipation de puissance massique par la turbulence - Production de turbulence.....	14
2.4	Bilan de puissance de l'écoulement moyen	15
	Bilan dans le cas général	15
	Bilan d'énergie massique dans le cas particuliers d'une conduite	15
	Cas d'une turbulence homogène	16
2.5	Pertes d'Energie massique dans une conduite	17
2.6	Mesure des pertes d'énergie massiques sur un tronçon de conduite	19
2.7	Expression de la perte d'énergie massique de l'écoulement	19
	Bilan de quantité de mouvement	19
	Coefficient de frottement et coefficient de perte local	20
	Écoulement laminaire.....	20
2.8	Détermination expérimentale du coefficient local de perte d'énergie massique	21
	Extension aux sections non cylindriques et écoulements à surface libre.....	23
2.9	Rugosité des conduites industrielles	23
	Rugosité équivalente	23
	Définition de la rugosité	24
	Rugosité correspondant à un écoulement turbulent lisse.....	25
2.10	Calcul du diamètre économique d'une conduite	26
	Transfert de pétrole dans un oléoduc.....	29
3	Pertes singulières d'énergie massique	30
3.1	Définition : coefficient de perte d'énergie massique singulière	30
3.2	Elargissement brusque	30
	Conduites.....	30
	Bord de fuite tronqué.....	31
	Décollement	32
3.3	Changement de direction	32
	Conduite coudée.....	32
3.4	Raccordement d'une conduite avec un grand réservoir	33
3.5	Coudes	35
	Coudes arrondis.....	35
	Coudes à angles vifs.....	35
	Tés (branchement à 90° de même diamètre que la conduite rectiligne, à angles vifs)	36

3.6	Changement de section	38
	Cônes 38	
	Angle d'ouverture inférieur ou égal à 10°	38
	Choix de l'angle d'ouverture d'un diffuseur	39
	Changement brusque de diamètre	39
3.7	Appareil de robinetterie	40
	Robinets-vannes	40
	Robinets à papillon.....	40
	Robinet à tournant	41
	Clapets de retenue	41
	Robinets à soupape, à pointeau, à aiguille.....	41
3.8	Détermination de la caractéristique du circuit	44
	Conventions:.....	44
	Définition:	44
	Circuit ouvert:	45
	Circuit fermé:	46
	pour une turbine:	47
	pour une pompe:.....	47
	pour une turbine	47
	Pour une pompe.....	48
4	ANNEXES	49
4.1	Turbulence	49
	Nombre de Reynolds	49
	Conservation de l'énergie cinétique massique du mouvement turbulent	50
	Dissipation par la viscosité.....	50
	Evaluation du taux de dissipation visqueuse du mouvement turbulent	52
	Les plus petites échelles de la turbulence	53
	Spectre de la turbulence	54
4.2	Ecoulement dans une conduite de section circulaire.....	55
	Ecoulement laminaire : profil de vitesse	55
	Ecoulement turbulent : distribution de contraintes.....	57
	Distribution de vitesse d'un écoulement turbulent, loi logarithmique.....	59
	Vitesse débitante	62
	Frottement à la paroi: loi implicite de Prandtl.....	63
5	REFERENCES.....	65

I BILAN D'ÉNERGIE MASSIQUE DANS LES CIRCUITS HYDRAULIQUES

1 CONSERVATION DE LA MASSE

1.1 Débit

Equation de continuité

Pour décrire une installation hydraulique, nous allons commencer par introduire les grandeurs fondamentales de l'écoulement. Pour cela, nous allons utiliser les équations de la mécanique des fluides qui peuvent s'écrire sous une forme intégrale. Ces équations permettent d'obtenir des solutions approchées des problèmes avec une précision souvent suffisante. Ces formes intégrales sont exactes pour des écoulements pour lesquelles les hypothèses faites pour les établir sont valides. Cependant il est généralement nécessaire d'effectuer certaines approximations pour trouver une solution au problème posé. C'est ainsi que les hydrauliciens ont pris l'habitude de considérer des grandeurs globales qui puissent caractériser les différents transferts de matière ou d'énergie dans un circuit hydraulique ce qui les a conduits à définir des grandeurs moyennes sur une section transversale de l'écoulement.

Afin de définir le débit ainsi que sa loi de conservation, nous allons partir de l'équation locale de la conservation de la matière ou encore équation de la continuité, (Ryhming 2004) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{C} \quad (1.1)$$

où l'on a introduit la dérivée particulaire:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{C} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad (1.2)$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible, la masse volumique de la particule fluide que nous suivons dans son mouvement demeure constante, soit

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1.3)$$

D'où la condition d'incompressibilité tirée de (1.1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0 \quad (1.4)$$

Bilan de masse appliqué un tronçon de conduite

Nous allons appliquer la condition d'incompressibilité locale à un volume V défini par la surface fermée, voir Figure 1, $\partial V = A_1 \cup A_2 \cup \Sigma$ où Σ désigne la surface de la paroi de la conduite qui est considérée comme une surface matérielle.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{C} dV = 0 \quad (1.5)$$

Nous allons alors appliquer le théorème de la divergence à l'intégrale volumique (1.5), (Aris 1962), (Pusterle 1991)

$$\int_{\partial V = A_1 \cup A_2 \cup \Sigma} \vec{C} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (1.6)$$

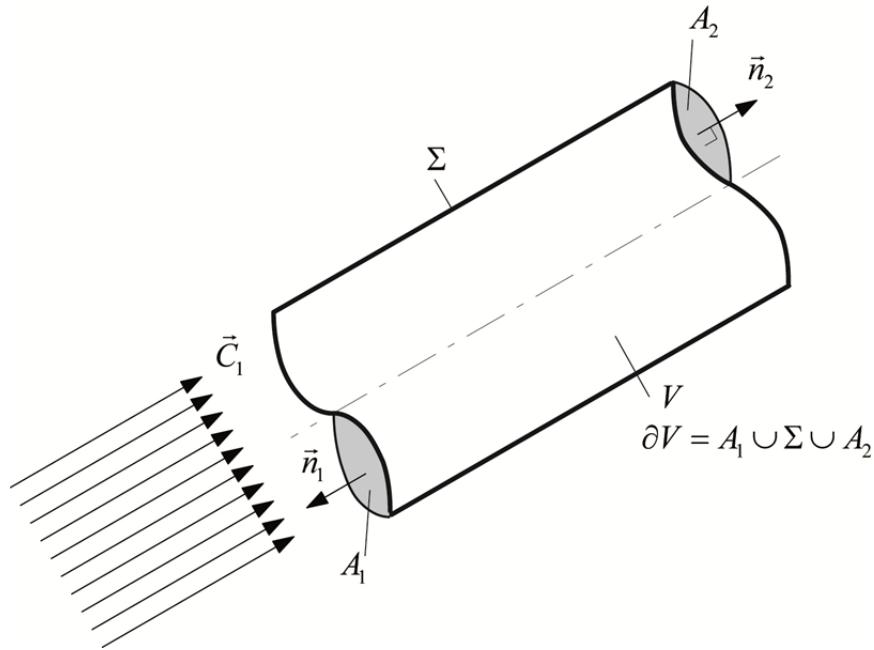


Figure 1 - Tronçon de conduite

Ce qui, en développant l'intégrale surfacique (1.6) donne

$$\int_{A_1} \vec{C} \cdot \vec{n} dA + \int_{A_2} \vec{C} \cdot \vec{n} dA + \int_{\Sigma} \vec{C} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (1.7)$$

Mais la surface Σ étant une surface matérielle, nous avons la condition

$$\vec{C} \cdot \vec{n}_{\Sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (1.8)$$

D'où le bilan de matière

$$\int_{A_1} \vec{C} \cdot \vec{n} dA + \int_{A_2} \vec{C} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (1.9)$$

Conservation du débit

Soit encore, en supposant par exemple que l'écoulement s'effectue de la section 1 vers la section 2, nous définissons le débit volumique traversant la section A_2

$$Q = \int_{A_2} \vec{C} \cdot \vec{n} dA \geq 0 \quad (1.10)$$

Alors d'après (1.9) nous obtenons la condition de conservation du débit au travers des 2 sections fluides

$$\int_{A_2} \vec{C} \cdot \vec{n} dA = - \int_{A_1} \vec{C} \cdot \vec{n} dA = Q > 0 \quad (1.11)$$

Remarque :

On notera que le débit est une grandeur extensive.

1.2 Conservation du débit au nœud d'une tri-jonction

Nous allons appliquer cette fois la condition d'incompressibilité locale (1.4) à un volume V défini par la surface fermée $\partial V = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \Sigma$ où Σ désigne la surface de la paroi des conduites qui est considérée comme une surface matérielle.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{C} dV = 0 \quad (1.12)$$

De manière similaire au paragraphe précédent nous obtenons

$$\int_{A_1} \vec{C} \cdot \vec{n} dA + \int_{A_2} \vec{C} \cdot \vec{n} dA + \int_{A_3} \vec{C} \cdot \vec{n} dA + \int_{\Sigma} \vec{C} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (1.13)$$

Mais la surface Σ étant une surface matérielle, nous avons la condition

$$\vec{C} \cdot \vec{n}_{\Sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (1.14)$$

D'où le bilan des débits

$$\underbrace{\int_{A_1} \vec{C} \cdot \vec{n} dA}_{-Q_1} + \underbrace{\int_{A_2} \vec{C} \cdot \vec{n} dA}_{Q_2} + \underbrace{\int_{A_3} \vec{C} \cdot \vec{n} dA}_{Q_3} = 0 \quad (1.15)$$

Soit encore, en supposant par exemple que l'écoulement s'effectue de la section 1 vers les sections 2 et 3,

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (1.16)$$

1.3 Vitesse débitante

Nous définissons la vitesse débitante C selon la formule suivante:

$$C_2 = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \vec{C} \cdot \vec{n} dA \quad (1.17)$$

La loi de conservation du débit prend alors une expression élémentaire

$$C_1 A_1 = C_2 A_2 = Q \quad (1.18)$$

Soit encore

$$C_2 = \frac{A_1}{A_2} C_1 = \frac{Q}{A_2} \quad (1.19)$$

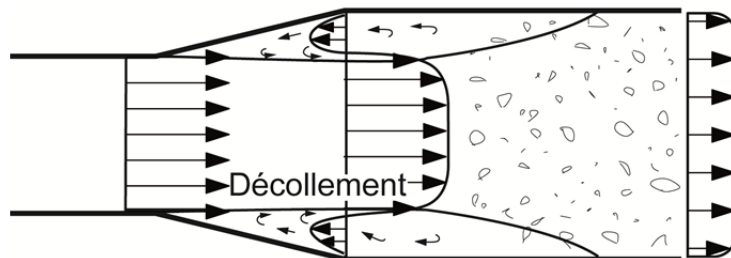


Figure 2 - Profil de vitesse dans un divergent

A une restriction de la section de passage correspond une augmentation de la vitesse débitante. Dans le cas d'une convergence le profil de vitesse moyenne est proche de la valeur de la vitesse débitante dans la section considérée.

Par contre, un élargissement de la section de passage peut provoquer un décollement des lignes de courant et il en résulte une distribution des vitesses moyennes qui s'écarte notablement de la valeur de la vitesse débitante, Figure 2.

1.4 Cas d'une conduite de section circulaire

Dans le cas particulier d'une conduite cylindrique de section circulaire de diamètre D , la surface de la section fluide est donnée par:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (1.20)$$

Par conséquent, les vitesses débitantes varient en raison inverse du carré du diamètre de la section de passage.

$$C_1 = \frac{D_2^2}{D_1^2} C_2 \quad (1.21)$$

2 ENERGIE MASSIQUE

2.1 Définition

Le bilan d'énergie mécanique appliqué au cas du mouvement moyen permanent d'un écoulement turbulent incompressible dans un circuit hydraulique permet d'introduire la notion d'énergie hydraulique massique moyenne d'une section.

En effet, ce bilan effectué sur un tronçon du circuit limité par les sections 1 et 2 s'écrit avec la convention de compter positivement un apport au volume considéré.

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \cup A_2} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right) \rho \bar{C} \cdot \bar{n} dA &= \int_{A_1} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right) \rho \bar{C} \cdot \bar{n} dA + \int_{A_2} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right) \rho \bar{C} \cdot \bar{n} dA \\ &= gH_1 (-\rho Q) + gH_2 \rho Q \end{aligned} \quad (1.22)$$

On définit ainsi l'énergie massique moyenne de la section 1 et, respectivement, celle de la section 2

$$\begin{aligned} gH_1 &= \frac{1}{-Q} \int_{A_1} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{C^2}{2} \right) \bar{C} \cdot \bar{n} dA \\ gH_2 &= \frac{1}{Q} \int_{A_2} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{C^2}{2} \right) \bar{C} \cdot \bar{n} dA \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ces termes représentent l'énergie mécanique massique moyenne dans la section considérée pondérée par la composante débitante de la vitesse.

2.2 Energie cinétique massique d'une particule dans son mouvement moyen

Composantes moyennes et fluctuantes

La caractéristique principale des écoulements turbulents provient de leur nature aléatoire. Ainsi, l'évolution des signaux temporels de vitesse, de pression que l'on peut enregistrer ne peut être prévue exactement. C'est pourquoi, il apparaît intéressant de décomposer une variable, notée $\tilde{f}$

en termes de valeur moyenne $\bar{f}$ et de grandeur fluctuante f' . Voici les notations que nous allons introduire :

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \bar{C} + \bar{c}' \\ \tilde{p} &= p + p'\end{aligned}\quad (1.24)$$

Avec la définition de l'opérateur de moyenne

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{C}} &= \bar{C} \text{ et } \overline{\bar{c}'} = 0 \\ \overline{\tilde{p}} &= p \text{ et } \overline{p'} = 0\end{aligned}\quad (1.25)$$

Equation de continuité

La condition d'incompressibilité s'applique au champ d'écoulement instantané $\tilde{C}$, soit:

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{C} = 0. \quad (1.26)$$

En introduisant la décomposition de Reynolds de la vitesse instantanée $\tilde{C}$ de l'écoulement en champ moyen $\bar{C}$ et en grandeurs fluctuantes $\bar{c}'$: $\tilde{C} = \bar{C} + \bar{c}'$, l'équation de continuité devient du fait des propriétés de linéarité de l'opérateur de divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{C} = \vec{\nabla} \cdot (\bar{C} + \bar{c}') = \vec{\nabla} \cdot \bar{C} + \vec{\nabla} \cdot \bar{c}' = 0 \quad (1.27)$$

Soit encore en appliquant l'opérateur de moyenne à l'équation instantanée de continuité on obtient, compte tenu des propriétés de linéarité de ce dernier opérateur :

$$\overline{(\vec{\nabla} \cdot \tilde{C})} = \overline{\vec{\nabla} \cdot \bar{C}} + \overline{\vec{\nabla} \cdot \bar{c}'} = \vec{\nabla} \cdot \bar{C} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \overline{\bar{c}'}}_{=0} = 0 \quad (1.28)$$

Or par définition la moyenne d'une composante fluctuante est nulle, par conséquent il en résulte que le champ moyen de vitesse vérifie l'équation de continuité:

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{C} = 0 \quad (1.29)$$

Du fait de la linéarité de l'équation de continuité l'écoulement moyen vérifie aussi cette équation. Il en résulte que les fluctuations de vitesse la vérifient aussi.

En effet, en revenant à l'expression de l'équation instantanée, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \bar{C}}_{=0} + \vec{\nabla} \cdot \bar{c}' = 0$$

soit le résultat

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{c}' = 0$$

Equation de Reynolds

Les équations de Navier Stokes pour l'écoulement instantané s'écrivent:

$$\frac{D\tilde{C}}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\tilde{p}}{\rho} + gZ \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(2\nu \vec{\tilde{D}} \right) \quad (1.30)$$

Avec le tenseur des vitesses instantanées de déformation

$$\vec{\tilde{D}} = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\nabla} \otimes \tilde{C} \right) + \left(\vec{\nabla} \otimes \tilde{C} \right)^t \right] \quad (1.31)$$

qui représente le tenseur des taux de déformation de l'écoulement défini par la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse $\vec{\nabla} \otimes \tilde{C}$.

La décomposition de l'écoulement en grandeurs moyennes stationnaires $\bar{C}$, p et en grandeurs purement fluctuantes $\bar{c}'$, p' permet d'établir à l'aide de l'équation de Navier-Stokes une équation de conservation moyenne de la quantité de mouvement appelée **équation de Reynolds** qui s'écrit dans le cas d'un écoulement incompressible placé dans un champ de pesanteur d'accélération g ¹;

$$\frac{D\bar{C}}{Dt} = -\bar{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) + \bar{\nabla} \cdot \left(2\nu \bar{D} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right) \quad (1.32)$$

Le terme $\bar{\tau}_t$ est appelé le "tenseur de contraintes turbulentes", Il est défini par

$$\frac{\bar{\tau}_t}{\rho} = -\left(\overline{\bar{c}' \otimes \bar{c}'} \right) \quad (1.33)$$

Le tenseur des contraintes turbulentes ou tenseur de Reynolds apparait du fait de la non linéarité des équations de Navier Stokes (Tennekes and Lumley 1972). En effet introduisant la décomposition de Reynolds dans l'accélération instantanée d'une particule fluide de l'équation de Navier Stokes (1.30) il vient:

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{C}}{Dt} &= \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + (\tilde{C} \cdot \bar{\nabla}) \tilde{C} \\ &= \frac{\partial (\bar{C} + \bar{c}')}{\partial t} + (\bar{C} + \bar{c}') \cdot \bar{\nabla} (\bar{C} + \bar{c}') \\ &= \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{c}'}{\partial t} + \bar{C} \cdot \bar{\nabla} \bar{C} + \bar{C} \cdot \bar{\nabla} \bar{c}' + \bar{c}' \cdot \bar{\nabla} \bar{C} + \bar{c}' \cdot \bar{\nabla} \bar{c}' \end{aligned} \quad (1.34)$$

Soit en appliquant l'opérateur de moyenne à (1.34) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{C}}{Dt} &= \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{c}'}{\partial t} + \overline{\bar{C} \cdot \bar{\nabla} \bar{C}} + \overline{\bar{C} \cdot \bar{\nabla} \bar{c}'} + \overline{\bar{c}' \cdot \bar{\nabla} \bar{C}} + \overline{\bar{c}' \cdot \bar{\nabla} \bar{c}'} \\ &= \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + (\bar{C} \cdot \bar{\nabla}) \bar{C} + \overline{\bar{c}' \cdot \bar{\nabla} \bar{c}'} = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + (\bar{C} \cdot \bar{\nabla}) \bar{C} + \bar{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\overline{\bar{c}' \otimes \bar{c}'} \right)}_{= -\frac{\bar{\tau}_t}{\rho}} - \underbrace{\bar{c}' \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{c}'}_{=0} \\ &= \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + (\bar{C} \cdot \bar{\nabla}) \bar{C} - \bar{\nabla} \cdot \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Par construction, ce tenseur est symétrique et ne dépend que des 6 corrélations doubles des composantes de la vitesse fluctuante.

$$\tau_{ii,j} = -\rho \overline{c'_i c'_j} \quad (1.36)$$

Tenseur des contraintes totales

Pour simplifier l'écriture de l'équation (1.32) nous introduisons $\bar{P}$ le tenseur des contraintes totales moyennes agissant sur le fluide, il est défini selon

$$\bar{P} = \left(-\frac{p}{\rho} + gZ \right) \bar{I} + 2\nu \bar{D} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho}. \quad (1.37)$$

¹ Il est fréquent que l'équation de Reynolds soit écrite sans tenir compte de la gravité terrestre notamment dans les codes de calculs. Dans le cas où malgré tout on souhaite en tenir compte il suffit de considérer la variable de pression p/ρ comme représentant la somme $p/\rho + gZ$ de l'énergie massique de pression du fluide et de l'énergie potentielle massique du fluide.

Ainsi (1.32) prend la forme compacte suivante:

$$\frac{D\vec{C}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{P}} \quad (1.38)$$

Equation de conservation d'énergie cinétique locale

En multipliant l'équation vectorielle (1.38) par le vecteur vitesse moyenne $\vec{C}$ nous obtenons une équation scalaire qui s'interprète comme la variation d'énergie cinétique massique moyenne d'une particule fluide que l'on suit dans son mouvement moyen.

En effet le produit scalaire donne:

$$\vec{C} \cdot \frac{D\vec{C}}{Dt} = \vec{C} \cdot \left[\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\bar{P}}}{\rho} \right] \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.39)$$

Soit encore en reconnaissant la dérivée d'un produit, on vérifie bien l'interprétation donnée à cette équation.

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{C}^2}{2} \right) = \vec{C} \cdot \left[\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\bar{P}}}{\rho} \right] \quad (1.40)$$

On peut encore faire apparaître la divergence d'un produit scalaire dans le terme de droite. En introduisant les composantes dans la base des $\{\vec{e}_i; i=1, n\}$ le membre de droite de l'équation (1.40) s'écrit:

$$C_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} = \frac{\partial C_i P_{ij}}{\partial X_j} - \frac{\partial C_i}{\partial X_j} P_{ij} \quad (1.41)$$

Le tenseur $\vec{\bar{P}}$ est symétrique donc on a $P_{ij} = P_{ji}$ et le 1^{er} terme du membre de droite de l'équation (1.41) se transforme selon

$$\frac{\partial C_i P_{ij}}{\partial X_j} = \frac{\partial C_i P_{ji}}{\partial X_j} = \frac{\partial P_{ji} C_i}{\partial X_j} \quad (1.42)$$

Soit encore en intervertissant les indices muets i et j dans (1.42) on reconnaît la divergence du vecteur $\vec{\bar{P}} \cdot \vec{C}$

$$\frac{\partial C_i P_{ji}}{\partial X_j} = \frac{\partial P_{ij} C_j}{\partial X_i} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\bar{P}} \cdot \vec{C})$$

Le 2^{ème} terme du membre de droite de l'équation (1.41) s'identifie au produit scalaire du tenseur gradient de vitesse $(\vec{\nabla} \otimes \vec{C})$ avec celui du tenseur $\vec{\bar{P}}$ des contraintes totales

$$\frac{\partial C_i}{\partial X_j} P_{ij} = (\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) : \vec{\bar{P}}$$

d'où l'on tire l'expression suivante en notations symboliques

$$\vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{P}}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\bar{P}} \cdot \vec{C}) - (\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) : \vec{\bar{P}} \quad (1.43)$$

En substituant l'expression (1.43) dans celle de l'évolution de l'énergie cinétique massique moyenne, (1.40), on obtient l'équation locale de conservation de l'énergie cinétique massique moyenne d'une particule dans son mouvement moyen.

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{C}^2}{2} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\bar{P}}}{\rho} \cdot \vec{C} \right) - (\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) : \frac{\vec{\bar{P}}}{\rho} \quad (1.44)$$

Dissipation interne de puissance et flux net des efforts extérieurs

Le tenseur des contraintes moyennes totales $\bar{\bar{P}}$ étant symétrique, il est identiquement égal à son transposé

$$\bar{\bar{P}} = \bar{\bar{P}}^T \quad (1.45)$$

De même le transposé d'un produit scalaire est égal au produit des transposés:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) : \bar{\bar{P}} &= \left((\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) : \bar{\bar{P}} \right)^T \\ &= (\vec{\nabla} \otimes \vec{C})^T : \bar{\bar{P}}^T \\ &= (\vec{\nabla} \otimes \vec{C})^T : \bar{\bar{P}} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Donc en effectuant la demie somme, il vient (Germain and Muller 1995):

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) : \bar{\bar{P}} &= (\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) : \bar{\bar{P}} = (\vec{\nabla} \otimes \vec{C})^T : \bar{\bar{P}} \\ &= \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) : \bar{\bar{P}} + (\vec{\nabla} \otimes \vec{C})^T : \bar{\bar{P}} \right] = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{C})^T \right] : \bar{\bar{P}} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Soit encore en reconnaissant l'expression du tenseur des taux de déformation

$$\underbrace{\frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \otimes \vec{C}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{C})^T \right]}_{\bar{\bar{D}}} : \bar{\bar{P}} = \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{P}} \quad (1.48)$$

Par conséquent l'équation locale de conservation de l'énergie cinétique prend la forme suivante:

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{C}^2}{2} \right)}_{\text{Variation d'énergie cinétique massique}} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\bar{\bar{P}}}{\rho} \cdot \vec{C} \right)}_{\text{Contribution externe}} - \underbrace{\left(\bar{\bar{D}} : \frac{\bar{\bar{P}}}{\rho} \right)}_{\text{Contribution interne}} \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.49)$$

dans laquelle, on identifie deux contributions à la variation d'énergie cinétique massique d'une particule sans son mouvement moyen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\bar{\bar{P}}}{\rho} \cdot \vec{C} \right) &: \text{le flux net de puissance massique des efforts extérieurs ;} \\ -\bar{\bar{D}} : \frac{\bar{\bar{P}}}{\rho} &: \text{la dissipation massique de la puissance des efforts intérieurs.} \end{aligned}$$

On évalue alors en détail ces 2 contributions en développant l'expression du tenseur des contraintes totales moyennes dans (1.49), l'équation de conservation de l'énergie cinétique massique d'une particule.

Il vient ainsi

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{C}^2}{2} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left[\left\{ - \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \bar{I} + 2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right\} \cdot \vec{C} \right] - \left\{ - \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \bar{I} + 2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right\} : \bar{\bar{D}} \quad (1.50)$$

Contribution des termes d'énergie potentielle massique au flux de puissance massique (efforts extérieurs)

Pour le terme de divergence qui représente la contribution des efforts extérieurs, l'expression tensorielle de l'énergie massique potentielle se réduit à:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\left\{ - \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \vec{I} \right\} \cdot \vec{C} \right] = -\vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \vec{I} \cdot \vec{C} \right] = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \vec{C} \quad (1.51)$$

Contribution des termes d'énergie potentielle massique à la dissipation massique (efforts intérieurs)

Tandis que la contribution à la puissance massique des efforts intérieurs se développe selon

$$\begin{aligned} - \left\{ - \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \vec{I} \right\} : \vec{D} &= \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \vec{I} : \vec{D} \\ &= \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{C})}_{=0} = 0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

pour un fluide incompressible

en effet en introduisant les composantes du tenseur $\vec{D}$ dans la base des $\{\vec{e}_i; i=1, n\}$ il vient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \vec{D} : \vec{I} &= \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) D_{ij} \delta_{ij} = \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) D_{ii} = \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \frac{\partial C_i}{\partial X_i} \\ &= \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{C} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Ce terme est toujours nul pour un fluide incompressible.

On vérifie ainsi un résultat important: la contribution de la pression et du champ de gravité à la dissipation de puissance moyenne des efforts intérieurs est nulle dans le cas d'un fluide incompressible.

Finalement (1.51), l'équation locale de conservation de l'énergie cinétique massique du mouvement moyen s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{C}^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{C}^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{C}^2}{2} \vec{C} \right] \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left[\left\{ \frac{p}{\rho} + gZ \right\} \vec{C} \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\left\{ 2\nu \vec{D} + \frac{\vec{\tau}_t}{\rho} \right\} \cdot \vec{C} \right] - 2\nu \vec{D} : \vec{D} - \frac{1}{\rho} \vec{\tau}_t : \vec{D} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Ce qui permet de faire apparaître le flux par unité de temps d'énergie massique locale d'une particule fluide dans son mouvement moyen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{C}^2}{2} + \vec{\nabla} \cdot \left[\underbrace{\left\{ \frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\vec{C}^2}{2} \right\}}_{\text{Energie hydraulique massique locale}} \vec{C} \right] &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left\{ 2\nu \vec{D} + \frac{\vec{\tau}_t}{\rho} \right\} \cdot \vec{C} \right] - \underbrace{2\nu \vec{D} : \vec{D}}_{\Phi: \text{dissipation visqueuse}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \vec{\tau}_t : \vec{D}}_{\Pi: \text{production de turbulence}} \\ & \quad \left(\text{W} \cdot \text{kg}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Ainsi le flux net d'énergie hydraulique massique locale du mouvement moyen est à la fois affecté par la diffusion moléculaire et turbulente, flux net des contraintes visqueuses et turbulentes, et par des termes de dissipation interne de puissance massique de nature visqueuse

et turbulente. On est ainsi amenés à définir Φ la dissipation visqueuse par unité de masse et Π la production de turbulence par unité de masse qui représente la puissance massique moyenne transférée du mouvement moyen au mouvement fluctuant.

$$\Phi = 2\nu \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}} \text{ et } \Pi = \frac{1}{\rho} \overline{\overline{\tau_t}} : \overline{\overline{D}} \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.56)$$

2.3 Dissipation de puissance du mouvement moyen

Dissipation de puissance massique par la viscosité

La dissipation massique de puissance est liée d'une part à la dissipation moléculaire de la quantité de mouvement par la viscosité visqueuse et d'autre part à la turbulence.

Le terme lié aux contraintes visqueuses s'écrit en fonction du tenseur $\overline{\overline{D}}$ des taux de déformation

$$-2\nu \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}} = -2\nu \underbrace{\overline{\overline{D}}^2}_{\geq 0} \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1})$$

Ce terme fait intervenir le carré scalaire du tenseur des taux de déformation moyenne, il est donc toujours positif, il correspond à une perte de puissance irréversible; il s'agit de la dissipation moyenne de l'énergie cinétique par la viscosité.

Pour représenter cette perte, il est d'usage d'introduire la fonction de dissipation de Rayleigh Φ qui représente la puissance dissipée par la viscosité par unité de masse de matière.

$$\Phi = 2\nu \overline{\overline{D}}^2 \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1})$$

En coordonnées cartésiennes la fonction de dissipation Φ a pour expression:

$$\Phi = 2\nu \left[\left(\frac{\partial C_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial C_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial C_3}{\partial X_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_1}{\partial X_3} + \frac{\partial C_3}{\partial X_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_2}{\partial X_1} + \frac{\partial C_1}{\partial X_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_3}{\partial X_2} + \frac{\partial C_2}{\partial X_3} \right)^2 \right]$$

Dissipation de puissance massique par la turbulence - Production de turbulence

La contribution d'origine turbulente à la variation d'énergie hydraulique massique s'écrit sous la forme du produit du tenseur des taux de déformations moyennes par le tenseur des contraintes turbulentes de Reynolds.

Ce produit a pour expression sous forme développée

$$\frac{1}{\rho} \overline{\overline{\tau_t}} : \overline{\overline{D}} = -\frac{1}{\rho} \overline{\tau_{t,ij}} D_{ij} = -\left(\overline{c'_i c'_j} \right) \frac{\partial C_i}{\partial X_j} \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1})$$

Il représente un transfert d'énergie entre le mouvement moyen et le mouvement fluctuant. La densité massique de puissance correspondante a reçu la dénomination de production de turbulence.

$$\Pi = \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{\tau_t}} = -\overline{c'_i c'_j} \frac{\partial C_i}{\partial X_j} \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1})$$

D'une manière générale, ce terme de transfert est positif dans le cas par exemple des couches limites, jets, sillages, écoulements en conduites. Ceci correspond dans l'équation de conservation de l'énergie hydraulique massique à une diminution de celle-ci au profit de l'énergie cinétique de la turbulence. C'est pourquoi il a reçu le nom de terme de production de la turbulence il est noté Π .

Toutefois, dans des écoulements complexes, interaction de deux jets turbulents par exemple, ce terme peut être négatif, on observe alors une "*production négative*" de turbulence.

Ainsi avec ces notations et dans le cas d'un écoulement moyen stationnaire, la conservation de l'énergie massique locale d'une particule fluide dans son mouvement moyen prend la forme :

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right\}}_{\text{Energie hydraulique massique locale}} \vec{C} = \vec{\nabla} \cdot \left[\left\{ 2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right\} \cdot \vec{C} \right] - \Phi - \Pi \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.57)$$

2.4 Bilan de puissance de l'écoulement moyen

Bilan dans le cas général

L'équation locale de conservation de l'énergie hydraulique massique du mouvement moyen a été établie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{C}^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\left[\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right] \vec{C} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\left[2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right] \cdot \vec{C} \right) - \Phi - \Pi \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.58)$$

Le produit de cette équation par ρdV la masse d'un élément de volume d'écoulement permet d'établir le bilan local de puissance d'une particule fluide dans son mouvement moyen.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{C}^2}{2} \right) \rho dV + \vec{\nabla} \cdot \left(\left[\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right] \vec{C} \right) \rho dV = \vec{\nabla} \cdot \left(\left[2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right] \cdot \vec{C} \right) \rho dV - (\Phi + \Pi) \rho dV \quad (\text{W}) \quad (1.59)$$

Et l'intégrale de ce bilan étendue au volume de contrôle V fournit alors le bilan de puissance de l'écoulement moyen dans ce volume.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{C}^2}{2} \rho dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\left[\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right] \vec{C} \right) \rho dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\left[2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right] \cdot \vec{C} \right) \rho dV - \int_V \Phi \rho dV - \int_V \Pi \rho dV \quad (\text{W}) \quad (1.60)$$

L'application du théorème de la divergence pour transformer les intégrales de volume en intégrale de surface permet de faire apparaître la variation de puissance de l'écoulement moyen au travers de la frontière ∂V du volume de contrôle V :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{C}^2}{2} \rho dV + \int_{\partial V} \left[\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right] \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dA = \int_{\partial V} \left(\left[2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right] \cdot \rho \vec{C} \right) \cdot \vec{n} dA - \int_V \Phi \rho dV - \int_V \Pi \rho dV \quad (1.61)$$

Bilan d'énergie massique dans le cas particuliers d'une conduite

Dans le cas pratique de l'application de l'équation de (1.61) à l'écoulement turbulent dans un tronçon de conduite défini par les sections fluides A_1 et A_2 et la paroi intérieure Σ , un certain nombre de simplifications peuvent être faites.

Tout d'abord la paroi interne de la conduite Σ définit une surface matérielle, il n'y a donc aucun flux de matière à travers celle-ci

$$\vec{C} \cdot \vec{n}_\Sigma = 0 \quad (1.62)$$

Alors l'intégrale surfacique du terme d'énergie hydraulique massique de l'équation (1.61) se réduit à l'intégration sur les seules sections fluides A_1 et A_2

$$\int_{\partial V = A_1 \cup A_2 \cup \Sigma} \left[\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right] \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dA = \int_{A_1 \cup A_2} \left[\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right] \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dA + 0 \quad (W) \quad (1.63)$$

Par ailleurs dans le cas des écoulements turbulents de fluides visqueux la condition de non glissement sur une paroi solide impose

$$\vec{C} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (1.64)$$

On en conclue donc que l'intégrale surfacique des termes de contraintes visqueuse et turbulente de l'équation (1.61) se réduit à l'intégration sur les seules sections fluides A_1 et A_2 .

Les contraintes visqueuses et turbulentes à la paroi solide ne participent pas à la variation de puissance hydraulique dans la conduite

$$\int_{\partial V = A_1 \cup A_2 \cup \Sigma} \left(\left[2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right] \cdot \rho \vec{C} \right) \cdot \vec{n} dA = \int_{A_1 \cup A_2} \left(\left[2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right] \cdot \rho \vec{C} \right) \cdot \vec{n} dA + 0 \quad (W) \quad (1.65)$$

Ainsi dans la situation considérée l'équation (1.61) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \cup A_2} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right) \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dA = & - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \frac{C^2}{2} \rho dV + \int_{A_1 \cup A_2} \left(2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right) \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dA \\ & - \int_V \Phi \rho dV - \int_V \Pi \rho dV \end{aligned} \quad (1.66)$$

La variation de puissance mécanique entre les deux sections est égale, au terme instationnaire prêt, à la différence entre la puissance des efforts extérieurs visqueux et turbulents, qui s'appliquent sur ces deux sections, et celle des efforts intérieurs dissipée par la viscosité et la turbulence au sein de l'écoulement.

Cas d'une turbulence homogène

Si la turbulence de l'écoulement est totalement développée, de sorte que l'écoulement du fluide soit homogène entre les sections fluides A_1 et A_2 , les distributions de vitesse moyenne et fluctuante sont invariantes par translation suivant l'axe de la conduite et donc en particulier entre les sections fluides A_1 et A_2 .

$$\int_{A_1 \cup A_2} \left(\left[2\nu \bar{\bar{D}} + \frac{\bar{\tau}_t}{\rho} \right] \cdot \rho \vec{C} \right) \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (1.67)$$

Il vient alors simplement dans cas d'un écoulement moyen indépendant du temps

$$\int_{A_1 \cup A_2} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right) \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dA = - \int_V (\Phi + \Pi) \rho dV \quad (1.68)$$

En définissant la puissance hydraulique moyenne dans chaque section :

$$P_{h_1} = - \int_{A_1} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right) \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dA \quad \text{et} \quad P_{h_2} = \int_{A_2} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{\bar{C}^2}{2} \right) \rho \vec{C} \cdot \vec{n} dA \quad (1.69)$$

On obtient :

$$-P_{h_1} + P_{h_2} = - \int_V (\Phi + \Pi) \rho dV \quad (W) \quad (1.70)$$

Soit encore

$$P_h = P_{h_2} + \int_V (\Phi + \Pi) \rho dV \quad (\text{W}) \quad (1.71)$$

La puissance hydraulique moyenne de l'écoulement sur la section fluide A_1 est égale à la puissance hydraulique moyenne de l'écoulement sur la section fluide A_2 augmentée de la puissance dissipée à l'intérieur de V par la viscosité et la turbulence.

Or en vertu de la condition de conservation du débit (1.11), on peut diviser chacun des termes de (1.70) par le débit massique ρQ

$$\frac{P_h}{\rho Q_1} = \frac{P_{h_2}}{\rho Q_2} + \int_V (\Phi + \Pi) \frac{\rho}{\rho Q} dV \quad (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.72)$$

On reconnaît la définition (1.23) de l'énergie hydraulique massique d'une section ce qui permet d'écrire le bilan énergétique suivant

$$gH_1 = gH_2 + gH_{r1 \div 2} \quad (1.73)$$

Avec l'expression de la perte énergétique du tronçon de conduite

$$\begin{aligned} gH_{r1 \div 2} &= \frac{1}{Q} \int_V \left(2\nu \overline{D}^2 + \overline{D} : \frac{\overline{\tau}_t}{\rho} \right) dV \\ &= \int_V (\Phi + \Pi) \frac{\rho}{\rho Q} dV \end{aligned} \quad (1.74)$$

Ainsi la perte énergétique d'un écoulement turbulent homogène dans une conduite est donnée par la dissipation visqueuse et la production de turbulence.

2.5 Pertes d'Energie massique dans une conduite

Nous considérons la perte d'énergie massique entre les deux sections fluides A_1 et A_2 qui limitent un tronçon de conduite cylindrique de longueur L et de diamètre D , voir Figure 3.

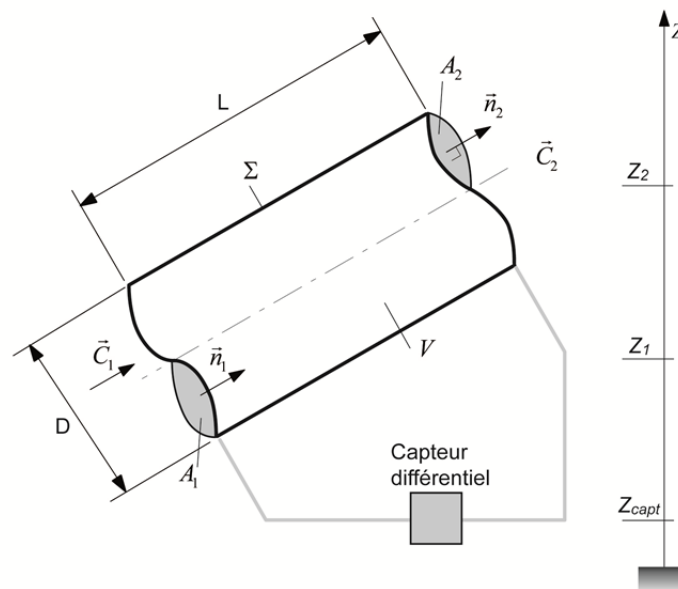


Figure 3 - Tronçon de conduite cylindrique de longueur L et de diamètre D .

Cette perte est simplement donnée par

$$\begin{aligned} gH_{r1+2} &= gH_1 - gH_2 \\ &= \frac{-1}{Q} \int_{A_1 \cup A_2} \left(\frac{p}{\rho} + gZ + \frac{C^2}{2} \right) \vec{C} \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (1.75)$$

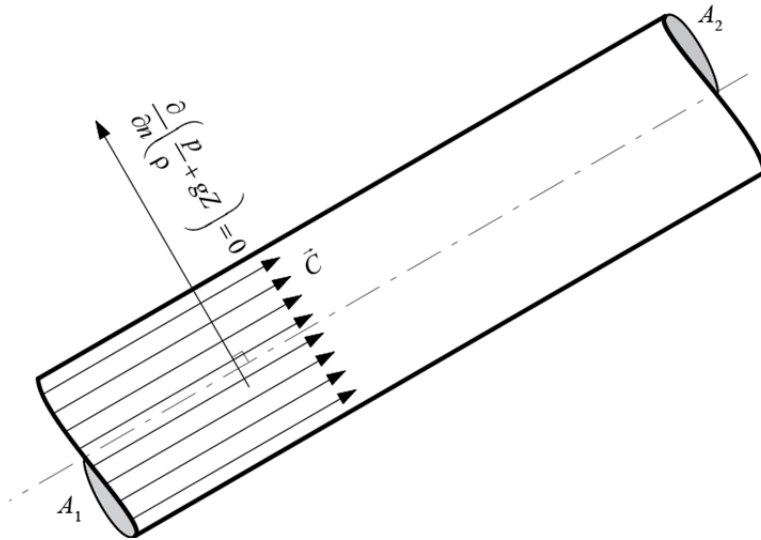


Figure 4 - Répartition de pression hydrostatique sur une section droite

Du fait de l'homogénéité du champ de vitesse, l'énergie massique moyenne de la section demeure constante. On doit avoir

$$\int_{A_1 \cup A_2} \frac{C^2}{2} \vec{C} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (1.76)$$

Par ailleurs si les lignes de courant sont rectilignes l'équation d'équilibre radial impose une répartition hydrostatique de pression sur une section droite, Figure 4

$$\frac{p}{\rho} + gZ = \text{Cste sur } A_1 \text{ et sur } A_2$$

On peut alors écrire :

$$gH_{r1+2} = - \left(\frac{p_1}{\rho} + gZ_1 \right) \int_{A_1} \frac{\vec{C} \cdot \vec{n} dA}{Q} - \left(\frac{p_2}{\rho} + gZ_2 \right) \int_{A_2} \frac{\vec{C} \cdot \vec{n} dA}{Q} \quad (1.77)$$

soit encore

$$gH_{r1+2} = \left(\frac{p_1}{\rho} + gZ_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + gZ_2 \right) \quad (1.78)$$

La perte d'énergie massique d'un écoulement homogène dans une conduite cylindrique est simplement donnée par la variation de pression piézométrique.

Ainsi une mesure différentielle de pression entre des prises situées en parois sur la périphérie de chacune des sections fournit la valeur de la perte d'énergie massique sur le tronçon de conduite.

2.6 Mesure des pertes d'énergie massiques sur un tronçon de conduite

On dispose un capteur de pression différentiel à une altitude Z_{capt} de telle manière que chacune de ses entrées soit connectée par une ligne de pression à une prise de pression en paroi, voir Figure 3.

Le capteur délivre un signal caractéristique de la différence de pression δp_{capt} qu'il détecte à ses bornes d'entrée.

Soit

$$\delta p_{capt} = p_{1capt} - p_{2capt} \quad (\text{Pa}) \quad (1.79)$$

L'équation de l'hydrostatique appliquée à chacune des lignes de pression donne :

$$p_{1capt} + \rho g Z_{1capt} = p_1 + \rho g Z_1 \quad (\text{Pa}) \quad (1.80)$$

d'où on tire

$$p_{1capt} = p_1 + \rho g Z_1 - \rho g Z_{1capt} \quad (\text{Pa}) \quad (1.81)$$

et de même on a

$$p_{2capt} = p_2 + \rho g Z_2 - \rho g Z_{2capt} \quad (\text{Pa}) \quad (1.82)$$

Par conséquent le capteur de pression différentiel mesure la différence donnée par :

$$\delta p_{capt} = (p_1 + \rho g Z_1) - (p_2 + \rho g Z_2) - (\rho g Z_{1capt} - \rho g Z_{2capt}) \quad (\text{Pa}) \quad (1.83)$$

et finalement si les deux entrées du capteur différentiel sont au même niveau Z_{capt} il vient:

$$\begin{aligned} \frac{\delta p_{capt}}{\rho} &= \left(\frac{p_1}{\rho} + g Z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + g Z_2 \right) \\ &= g H_1 - g H_2 \end{aligned} \quad (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.84)$$

2.7 Expression de la perte d'énergie massique de l'écoulement

Bilan de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement appliqué au même tronçon de conduite permet de déterminer la variation d'énergie massique. On considère que l'écoulement est stationnaire, alors on obtient l'équation vectorielle :

$$\int_{A_1 \cup A_2} \vec{C} \cdot \vec{C} \cdot \vec{n} dA = \int_{\partial V} \left(\frac{p}{\rho} + g Z \right) \vec{n} dA + \int_{\partial V} \left(\frac{\bar{\tau}_t}{\rho} + 2\nu \bar{\bar{D}} \right) \vec{n} dA \quad (1.85)$$

L'écoulement est supposé homogène, alors :

$$\int_{A_1 \cup A_2} \vec{C} \cdot \vec{C} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (1.86)$$

La composante axiale de l'équation (1.85) est obtenue en projetant ses termes suivant $\vec{n}_2$

$$\left(\frac{p}{\rho} + g Z \right)_1 A_1 - \left(\frac{p}{\rho} + g Z \right)_2 A_2 + \frac{\tau_p}{\rho} \times \Sigma = 0 \quad (1.87)$$

Avec τ_p la contrainte pariétale, qui est supposée constante le long de la conduite en raison de l'hypothèse d'homogénéité.

En exprimant les surfaces A et Σ en fonction des paramètres de la conduite

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \text{ et } \Sigma = \pi DL$$

on obtient

$$\begin{aligned} gH_{r1 \rightarrow 2} &= \left(\frac{p_1}{\rho} + gZ_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + gZ_2 \right) \\ &= \frac{4L}{D} \cdot \tau_p \end{aligned} \quad (1.88)$$

La perte d'énergie massique d'un écoulement homogène dans un tronçon d'une conduite cylindrique est proportionnelle à la longueur L de la conduite rapportée à son diamètre D et à la contrainte de frottement de la paroi sur le fluide.

$$gH_{r1 \rightarrow 2} = \frac{4L}{D} \cdot \tau_p \quad (1.89)$$

Coefficient de frottement et coefficient de perte local

En introduisant c_f le coefficient de frottement local de la paroi, (Ryhming 2004)

$$\tau_p = c_f \frac{C^2}{2} = c_f \frac{Q^2}{2A^2} \quad (1.90)$$

Il vient alors

$$gH_{r1 \rightarrow 2} = 8c_f \frac{L}{D} \cdot \frac{Q^2}{2A^2} \quad (1.91)$$

Les hydrauliciens définissent le coefficient local de perte d'énergie massique λ par

$$gH_{r1 \rightarrow 2} = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{C^2}{2} \quad (1.92)$$

On a alors la relation entre le coefficient local de perte d'énergie massique λ et le coefficient local de frottement C_f :

$$\lambda = 8c_f \quad (1.93)$$

Cette relation permet donc de déterminer λ à partir de l'expression du frottement à la paroi en effet on a

$$\lambda = 8c_f = 8 \frac{\tau_p}{\rho C^2} \quad (1.94)$$

Si on connaît l'expression du frottement à la paroi en fonction de la vitesse débitante il est dès lors possible de calculer le coefficient de perte d'énergie massique.

Écoulement laminaire

Dans le cas laminaire, par exemple, on est en présence d'une part un écoulement homogène ce qui fait que la relation précédente s'applique et d'autre part on sait que le profil de vitesse est parabolique, écoulement de Poiseuille.

Dans ce cas τ_p est une fonction linéaire (1.183) de la vitesse débitante donnée par

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \frac{8\nu}{D} C \quad (1.95)$$

Soit encore en introduisant le nombre de Reynolds de l'écoulement dans la conduite

$$\text{Re} = \frac{CD}{\nu} \quad (1.96)$$

On peut écrire

$$\frac{\tau_p}{\rho} = 2 \times \frac{8\nu}{CD} \frac{C^2}{2} = \frac{16}{\text{Re}} \frac{C^2}{2} \quad (1.97)$$

Soit en reportant (1.97) dans l'expression (1.94) du coefficient local de pertes d'énergie massique on obtient

$$\lambda = 8c_f = \frac{4}{\frac{C^2}{\rho}} \frac{\tau_p}{2} = \frac{4 \times 16}{\text{Re}} \quad (1.98)$$

Dans le cas d'un écoulement laminaire en conduite la valeur de λ est donnée par

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (1.99)$$

2.8 Détermination expérimentale du coefficient local de perte d'énergie massique

On vient donc de voir que dans le cas d'un écoulement homogène dans une conduite cylindrique de diamètre constant, les pertes d'énergie massique entre deux sections séparées par une longueur L_{1+2} prennent la forme suivante :

$$gH_{r1+2} = \lambda \frac{L_{1+2}}{D} \frac{C^2}{2} \quad (1.100)$$

avec

- λ coefficient local de perte de d'énergie massique (perte de charge) ;
- D diamètre de la conduite ;
- $L_{1+2} = \int_{1+2} dl$ longueur du tronçon de la conduite.

En toute généralité, il est possible de démontrer à l'aide de l'analyse dimensionnelle que le coefficient local de perte énergétique est une fonction de la forme

$$\lambda = f(\text{Re}, Ma, k', k'', \dots)$$

avec

- Re nombre de Reynolds ;
- Ma nombre de Mach (effets de compressibilité) ;
- $k', k'', \dots$ facteurs de forme

Cependant pour le type d'écoulements incompressibles considérés, le nombre de Mach n'intervient pas. Le coefficient λ dépend alors des facteurs de forme $k', k'', \dots$ qui définissent par leur rapport au diamètre de la conduite D les dimensions des irrégularités de la surface intérieure du tube. On définit à cet effet la rugosité absolue k , qui représente l'ensemble des caractéristiques géométriques des irrégularités de surface.

Finalement, pour le cas particulier d'une conduite de section constante, le coefficient de perte de charge est une fonction de la forme:

$$\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{k}{D}\right)$$

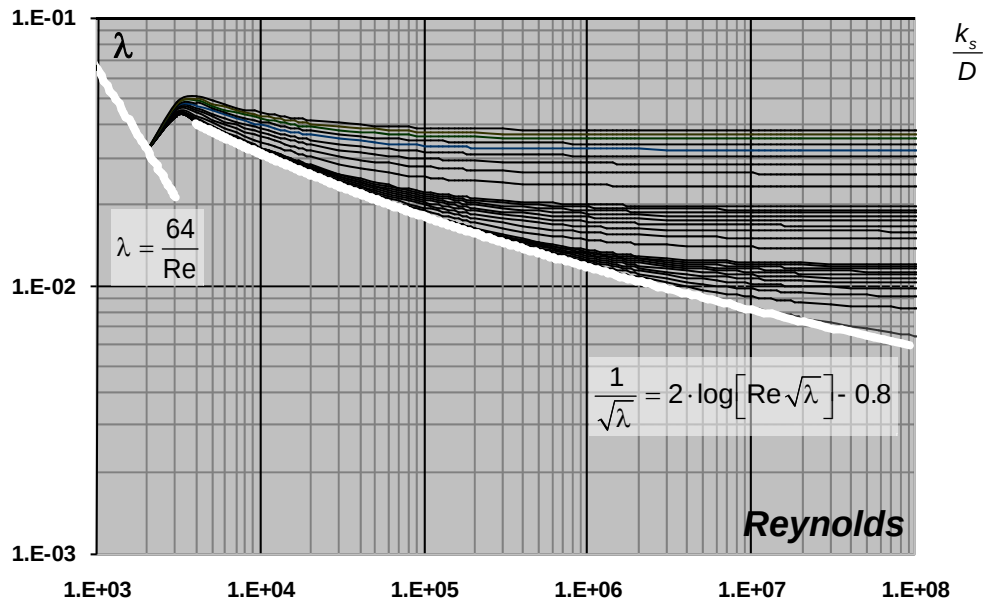


Figure 5 - Diagramme de perte de charge local dans une conduite cylindrique

Des expériences systématiques ont ainsi permis d'établir les courbes de la Figure 5 qui fournissent la valeur du coefficient de perte de charge local en fonction du nombre de Reynolds Re . D'après le diagramme de cette figure on voit que non seulement les coefficients de frottement sont fortement augmentés par la turbulence, mais que les paramètres dont ils dépendent ne sont plus les mêmes suivant que l'écoulement soit turbulent ou non.

Plus précisément sur le diagramme de la Figure 5 nous distinguons successivement 3 zones et les transitions correspondantes entre celles-ci

- La zone d'écoulement laminaire (*Ecoulement de Poiseuille*) qui correspond à une sous-couche visqueuse qui remplit toute la section, et on vient de voir que l'on peut établir la relation suivante (Hagen-Poiseuille)

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (1.101)$$

- La zone d'écoulement turbulent hydrauliquement lisse indépendant de la rugosité. Les effets de rugosité sont dans ce cas confinés dans la sous-couche laminaire, et n'influencent pas le coefficient local de perte d'énergie massique. Le coefficient est donné par la formule implicite de Prandtl (1.236)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log[Re\sqrt{\lambda}] - 0.8 \quad (1.102)$$

ce qui correspond à une valeur de la constante de Karman $\kappa = 0.407$

ou par la Formule de Blasius correspondant à un profil de vitesse approché par une loi de puissance d'exposant 7.

$$\lambda = \frac{0.364}{Re^{0.25}} \quad (1.103)$$

- La zone où le coefficient de frottement est pratiquement indépendant du nombre de Reynolds et est influencé uniquement par la rugosité réduite. Le régime d'écoulement est appelé turbulent rugueux.

Dans cette zone, la rugosité ne permet pas d'établir une sous-couche laminaire. En effet l'établissement de la sous-couche visqueuse dépend de la condition:

$$k^+ = \frac{kC_\tau}{\nu} = \frac{k}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} < 5 \quad (1.104)$$

Il faut noter que pour les 3 zones, la **formule analytique de Churchill** offre une très bonne approximation de λ pourvu que l'on connaisse précisément la rugosité moyenne de la conduite considérée

$$\lambda = 8 \left[\left(\frac{8}{\text{Re}} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{12}} \quad (1.105)$$

avec

$$A = \left[2.457 \cdot \ln \frac{1}{\left(\frac{7}{\text{Re}} \right)^{0.9} + 0.27 \cdot \frac{k_s}{D}} \right]^{16} \quad \text{et} \quad B = \left[\frac{37'530}{\text{Re}} \right]^{16}$$

Extension aux sections non cylindriques et écoulements à surface libre

Il est possible d'étendre ces résultats en employant le diamètre hydraulique D_h en lieu et place du diamètre D . Il est défini comme le rapport de l'aire de la section au périmètre mouillé, voir Figure 6.

$$D_h = 4 \frac{\text{Aire de la section}}{\text{Périmètre mouillé}}$$

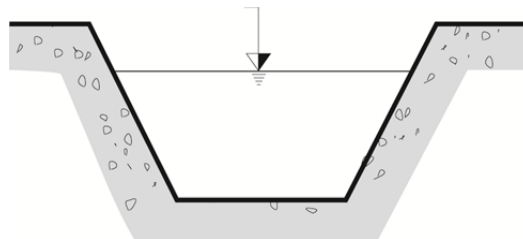


Figure 6 - Canal à surface libre

Le nombre de Reynolds et le facteur de rugosité relative employés afin de déterminer le coefficient de perte de charge deviennent alors:

$$\text{Re}_{D_h} = \frac{C \cdot D_h}{\nu} \quad \text{et} \quad \frac{k}{D_h}$$

On vérifie que pour le cercle:

$$D_h = \text{Coef} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4 \cdot \pi \cdot D} = D \Rightarrow \text{Coef} = 4$$

2.9 Rugosité des conduites industrielles

Rugosité équivalente

Le type de rugosité qui a servi à déterminer expérimentalement les valeurs de pertes d'énergie massiques correspondent à des rugosités artificielles utilisant des sables de granulométrie définie. En pratique ce type de rugosité est assez différent de la rugosité des conduites industrielles, la correspondance entre l'état de surface de ces dernières et la rugosité équivalente correspondant à la rugosité utilisée précédemment est donnée dans le Tableau 1.

Tableau 1 – Valeurs de rugosité équivalente de quelques conduites industrielles (Comolet 1994)

Type de la conduite	Etat de surface	Rugosité équivalente k
Tube étiré en verre, matière plastique, cuivre, laiton, inox		$<10^{-6}$ m
Tuyau industriel en PVC		de $10 \cdot 10^{-6}$ m à $20 \cdot 10^{-6}$ m
Tuyau industriel peint		$20 \cdot 10^{-6}$ m
Tuyau industriel en laiton		$25 \cdot 10^{-6}$ m
Tuyau laminé en acier	Neuf	$50 \cdot 10^{-6}$ m
	Rouillé	de $150 \cdot 10^{-6}$ m à $250 \cdot 10^{-6}$ m
	Incrusté	de $1.5 \cdot 10^{-3}$ m à $3 \cdot 10^{-3}$ m
Tuyau en acier soudé	Neuf	de $30 \cdot 10^{-6}$ m à $100 \cdot 10^{-6}$ m
	Rouillé	$400 \cdot 10^{-6}$ m
Tuyau en fonte moulée	Neuf	$250 \cdot 10^{-6}$ m
	Rouillé	de $1 \cdot 10^{-3}$ m à $1.5 \cdot 10^{-3}$ m
Tuyau en ciment centrifugé	Lisse	$300 \cdot 10^{-6}$ m
Tuyau en ciment non centrifugé	Lisse	de $300 \cdot 10^{-6}$ m à $800 \cdot 10^{-6}$ m
	Brut	jusqu'à $3 \cdot 10^{-3}$ m
Tuyau en acier rivé		de $900 \cdot 10^{-6}$ m à $9 \cdot 10^{-3}$ m
Galerie		de $90 \cdot 10^{-3}$ m à $600 \cdot 10^{-3}$ m

Définition de la rugosité

La notion de rugosité en moyenne arithmétique R_a est intéressante d'un point de vue pratique pour la définition d'un usinage. (Grein,). Cette rugosité est définie sur une pièce de longueur L par

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |y - \bar{y}| dL \quad (1.106)$$

où y est la hauteur de la surface et $\bar{y}$ celle du profil moyen. Un facteur d'équivalence, fondé sur des mesures pour des régimes turbulents lisses, peut être défini entre la rugosité au sable et la rugosité en moyenne arithmétique selon

$$R_a \approx 0.43k_s \quad (1.107)$$

La notion de rugosité technique k est également utile. Cette dernière est égale à la rugosité maximale $R_{\max}$ mesurée entre la dépression la plus profonde et l'aspérité la plus élevée. Le facteur d'équivalence entre $R_{\max}$ et R_a est de l'ordre de 6.

On retiendra donc la relation

$$k = R_{\max} \approx 6Ra \quad (1.108)$$

Le coefficient a de la formulation de Churchill s'écrit, en fonction de la rugosité R_a ,

$$a = \left[2.457 \ln \frac{1}{\left(\frac{7}{\text{Re}} \right)^{0.9} + \frac{0.63Ra}{D_H}} \right]^{16} \quad (1.109)$$

Rugosité correspondant à un écoulement turbulent lisse

On a établi 4.2 que l'établissement de la sous-couche visqueuse dépend de la condition:

$$k^+ < 5 \text{ avec } k^+ = \frac{k_s}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \text{ et } \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} = \sqrt{c_f} C = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} C$$

Soit encore en fonction du coefficient local de perte d'énergie massique :

$$k^+ = \frac{k_s}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \cdot C$$

Ou en introduisant le nombre de Reynolds de la conduite

$$k^+ = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \frac{k_s}{D} \frac{CD}{\nu} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \frac{k_s}{D} \text{Re} < 5$$

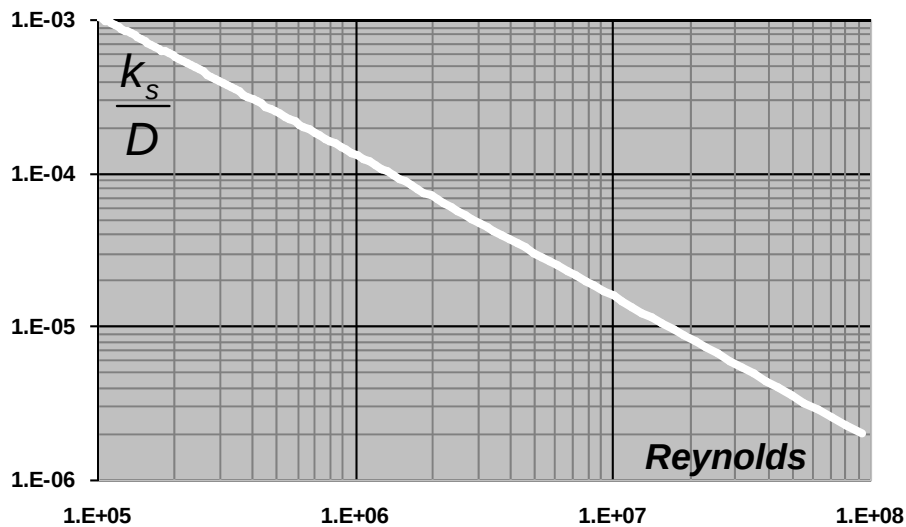


Figure 7 - Rugosité relative maximum pour obtenir un régime d'écoulement turbulent lisse.

On obtient ainsi la condition d'établissement d'une sous couche laminaire, Figure 42

$$\frac{k_s}{D} < 10 \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\text{Re}}$$

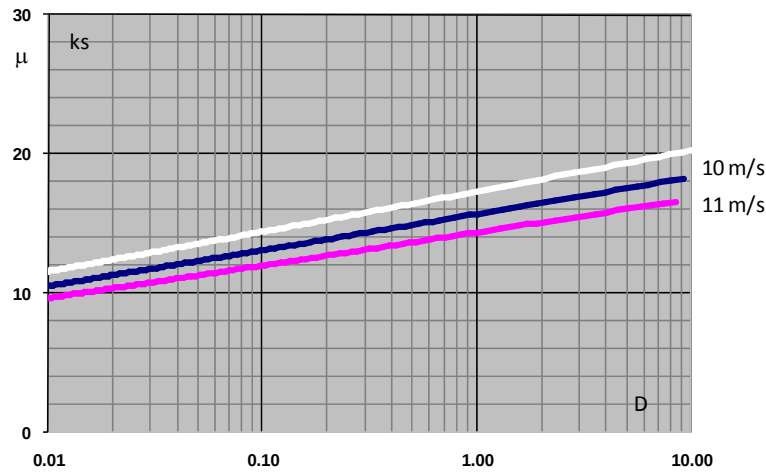


Figure 8 – Rugosité maximum k_s correspondant à un écoulement turbulent lisse dans une conduite de diamètre D pour 3 différentes vitesses débitantes

Si on considère une vitesse débitante donnée C , alors on obtient directement la valeur de la rugosité maximum correspondante à un régime d'écoulement turbulent lisse, voir Figure 8.

$$k_s < 10 \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{\nu}{CD}$$

2.10 Calcul du diamètre économique d'une conduite

La perte d'énergie massique dans une conduite de longueur L et de diamètre D vaut:

$$gH_r = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{C^2}{2} = \frac{8 \cdot \lambda \cdot L \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot D^5} \quad (1.110)$$

Nous voyons dans cette expression l'importance du choix du diamètre de la conduite qui pour un débit donné influence la perte d'énergie massique avec un exposant 5.

La puissance correspondante dissipée dans la conduite est alors :

$$P_r = \rho \cdot Q \cdot gH_r = \frac{8 \cdot \rho \cdot \lambda \cdot L \cdot Q^3}{\pi^2 \cdot D^5} \quad (1.111)$$

A titre d'exemple, on considère les données d'une conduite forcée avec les données suivantes :

- un diamètre $D = 3 \text{ m}$;
- une longueur $L = 5'400 \text{ m}$;
- un débit $Q = 78 \text{ m}^3/\text{s}$;
- une chute $H = 915 \text{ m}$

Ces données correspondent à une vitesse débitante de 11 m/s et une valeur du nombre de Reynolds $Re = 33.1 \cdot 10^6$ et un coefficient de pertes d'énergie massiques $\lambda = 1 \cdot 10^{-2}$ si l'on suppose que l'état de la conduite permet l'établissement d'un régime d'écoulement turbulent lisse. D'où la puissance dissipée dans la conduite forcée qui est de

$$P_{hr} = 85.4 \text{ MW}$$

Soit encore 12% de la puissance hydraulique disponible.

Le manque à gagner dépend du prix A du kWh et de la production de la centrale correspondant à une période T de production à la puissance considérée. Ainsi on a la formule suivante pour ce manque à gagner

$$A \times T \times P_r = A \times T \times \frac{8 \cdot \rho \cdot \lambda \cdot L \cdot Q^3}{\pi^2 \cdot D^5}$$

qui correspond à un montant de 30 MFr. sur une année, en supposant une disponibilité de production de 80% sur une année et un prix moyen de 0.05 Fr./kWh.

Si l'on réalise le même calcul pour un diamètre augmenté à 3.20 m pour réduire la vitesse débitante à 10 m/s on obtient alors un nombre de Reynolds $Re = 31.0 \cdot 10^6$.

Dans ce cas le coefficient de pertes d'énergie massiques est pratiquement inchangé $\lambda = 1 \cdot 10^{-2}$ et la puissance dissipée dans la conduite forcée est ramenée à

$$P_{hr} = 61.3 \text{ MW}$$

Soit plus que 8.6 % de la puissance hydraulique et un manque à gagner qui n'est plus que de 21 MFr.

Cependant, le coût de la réalisation de la conduite dépend directement de la masse M de matière utilisée. Dans le cas d'une conduite cylindrique elle correspond à

$$\begin{aligned} M &= \rho_{acier} \cdot \frac{\pi}{4} \int_L [(D + 2e)^2 - D^2] dL \\ &= \rho_{acier} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \int_L \left[\frac{4e^2}{D^2} + 2 \frac{2e}{D} \right] dL \end{aligned}$$

L'épaisseur est définie en fonction de la contrainte admissible σ_{adm} dans la conduite

$$\delta p \times D = \sigma_{adm} \times 2e$$

soit encore en supposant une répartition linéaire de la pression le long de la conduite

$$\frac{2e}{D} = \frac{\delta p}{\sigma_{adm}} \approx \frac{\rho E}{\sigma_{adm}} \frac{\ell}{L}$$

Donc en substituant cette expression il vient

$$\begin{aligned} M &= \rho_{acier} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \int_L \left[\left(\frac{\rho E}{\sigma_{adm}} \right)^2 \frac{\ell^2}{L^2} + 2 \frac{\rho E}{\sigma_{adm}} \frac{\ell}{L} \right] dL \\ &= \rho_{acier} \cdot \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\rho E}{\sigma_{adm}} \right)^2 + \frac{\rho E}{\sigma_{adm}} \right] \frac{\pi D^2 L}{4} \end{aligned}$$

Le coût d'installation de la conduite se ramène à des frais financiers qui, pour s'établissent à :

$$n \times B \times M = n \times B \times \rho_{acier} \cdot \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\rho E}{\sigma_{adm}} \right)^2 + \frac{\rho E}{\sigma_{adm}} \right] \frac{\pi D^2 L}{4}$$

Où B représente le prix de l'acier par unité de masse et n le taux annuel couvrant les intérêts et l'amortissement du coût d'installation de la conduite

On voit que ces frais financiers sont proportionnels à D^{2n} où n inférieur à $\frac{3}{2}$ est représentatif de la technologie de fabrication de la conduite. Le coût total de cette dernière s'exprime alors comme la somme du manque à gagner et de l'amortissement annuel du coût de l'installation de

cette conduite. Soit dans l'expression ci-après C = coût total en fonction du diamètre de la conduite:

$$C = A \cdot D^{2n} + B \frac{\lambda}{D^5}$$

Le diamètre de conduite optimal s'obtient de la manière suivante:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial P}{\partial D} \\ &= 2n \cdot A D^{2n} - 5 \cdot B \frac{\lambda}{D^6} + B \frac{1}{D^5} \frac{\partial \lambda}{\partial D} \\ &= 2n \cdot A D^{2n} - 5 \cdot B \frac{\lambda}{D^6} \left(1 - \frac{D}{5\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial D} \right) \\ &= 2n \cdot A D^{2n-1+6} - 5B\lambda \left(1 - \frac{D}{5\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial D} \right) \end{aligned} \quad (1.112)$$

Conduite		Installation	
Longueur	5400 m	Pression	9.15 Mpa
Diamètre	3.000 m	Débit	78.0 m3/s
Rugosité	0.0001 m	ρ	1'000 kg/m3
te admissible	200 Mpa	ν	1.00E-06
se volumique	5'000 kg/m3	Disponibilité	80%
Prix	€ 20.00	Prix énergie par kWh	€ 0.05
Intérêt	10%		
		Diamètre économique	3.300 m
Section	7.069 m2	Section	8.553 m2
Vitesse	11.0 m/s	Vitesse	9.1 m/s
λ	0.00999	λ	0.01207

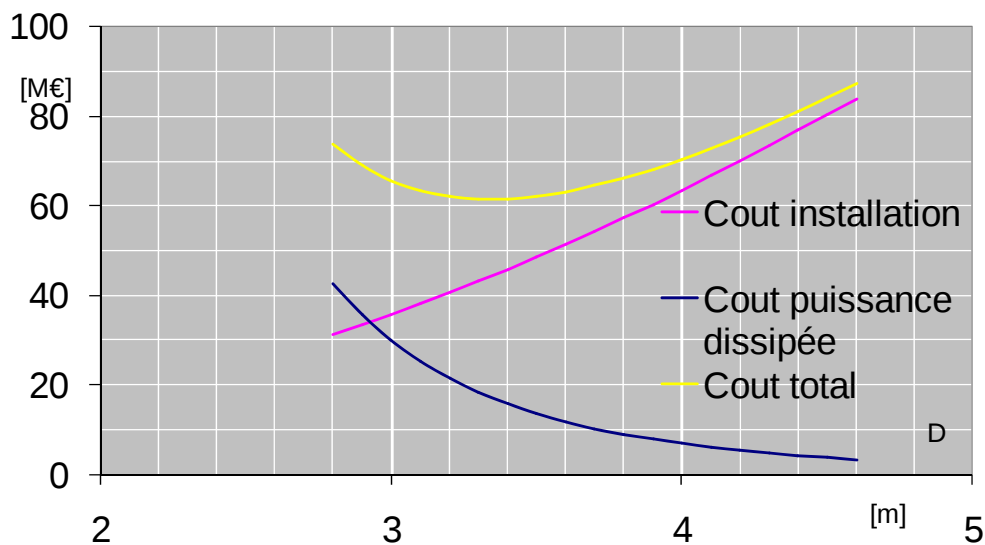


Figure 9 – Détermination du diamètre économique

L'influence du diamètre sur la valeur du coefficient de perte d'énergie massique local est assez faible. Nous pouvons toutefois en tenir compte par exemple si l'on utilise la formule simplifiée de Blasius, il vient

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{100 \text{Re}}} \text{ il vient } \frac{\partial \lambda}{\partial D} = \frac{1}{4} \frac{\lambda}{D}$$

soit alors

$$0 = 2n \cdot AD^{2n-1+6} - 5B\lambda \left(1 - \frac{1}{5 \times 4}\right)$$

$$0 = 2n \cdot AD^{2n-1+6} - 4.75B\lambda$$

La formule approximative permettant de calculer le diamètre économique d'une conduite s'écrit alors sous la forme.

$$D^{2n+5} \approx \frac{4.75B}{2n \cdot A} \quad (1.113)$$

Très souvent la valeur de ce diamètre correspond à une vitesse de l'ordre de 10 m/s pour les conduites métalliques.

Diamètre économique d'un oléoduc

Le choix du diamètre économique D d'un oléoduc utilisé pour transférer du pétrole avec un débit Q se fait en utilisant la formule empirique suivante

$$D = \sqrt{\frac{Q}{500}} \text{ où } D \text{ est exprimé en pouces et } Q \text{ en baril journalier !!!}$$

On peut encore écrire:

$$\frac{Q}{D^2} = 500 \times \frac{1 \text{ baril}}{1 \text{ jour}} \times \frac{1}{1 \text{ pouce}^2}$$

Cette expression se transforme alors en unités SI

$$\frac{Q}{D^2} = 500 \times 1 \cancel{\text{ baril}} \times \frac{0.15987 \text{ m}^3}{1 \cancel{\text{ baril}}} \times \frac{1}{1 \cancel{\text{ jour}}} \times \frac{1 \cancel{\text{ jour}}}{24 \times 3'600 \text{ s}} \times \frac{1}{1 \cancel{\text{ pouce}^2}} \frac{1 \cancel{\text{ pouce}^2}}{(25.4 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2}$$

$$\approx 1.434 \frac{\text{m}^3}{\text{m}^2 \text{s}}$$

Donc en unités SI la relation précédente devient

$$\frac{Q}{D^2} \approx 1.434 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On peut interpréter cette relation de manière plus intuitive en se référant à la notion de vitesse débitante maximum qui transite de manière économique par cet oléoduc de diamètre D .

Par définition la vitesse débitante C est donnée pour une conduite cylindrique de section circulaire:

$$C = \frac{Q}{\pi \frac{D^2}{4}}$$

Soit encore en fonction de la relation empirique précédente:

$$C = \frac{Q}{\pi \frac{Q}{4 \cdot 1.434 \text{ m/s}}} = \frac{4}{\pi} 1.434 \text{ m/s} = 1.826 \text{ m/s}$$

Le transfert "économique" du pétrole dans un oléoduc se fait avec une vitesse débitante de l'ordre de 1.8 m/s!

3 PERTES SINGULIÈRES D'ÉNERGIE MASSIQUE

3.1 Définition : coefficient de perte d'énergie massique singulière

Les pertes singulières d'énergie massique dans un circuit hydraulique sont des pertes liées à un transfert ou un mélange turbulent liées à une déviation, une obstruction ou un décollement de l'écoulement. Ce mélange est provoqué par des cisaillements de l'écoulement qui vont générer de la turbulence. Les tourbillons turbulents à grande échelle ainsi générés se décomposent ensuite en tourbillons de plus petite échelle jusqu'à ce que les effets de la viscosité moléculaire soient prépondérants.

C'est donc en présence de singularité de l'écoulement, décollement, que l'on sera confronté à des pertes "singulières" d'énergie massiques par opposition aux pertes dites régulières.

Le coefficient de perte singulière d'énergie massique est défini comme:

$$K_v = \frac{gH_{rv}}{\frac{C^2}{2}} \quad (1.114)$$

où gH_{rv} est la perte d'énergie massique du composant repéré par l'indice v . La vitesse débitante locale C de référence pour définir l'énergie cinétique massique est en général celle correspondant à la section d'entrée de l'organe considéré.

3.2 Elargissement brusque

Conduites

Les pertes singulières se trouvent partout où le terme de production de turbulence sera important c'est à dire là où les contraintes de cisaillement sont grandes. Un cas typique correspond à l'élargissement brusque tel que celui représenté Figure 10. Dans ce cas la discontinuité de la paroi provoque un décollement de l'écoulement et la turbulence résultante de ce décollement va provoquer un mélange qui tend à homogénéiser le profil de vitesse sur une distance de l'ordre de quelques diamètres.

On suppose que l'écoulement aux sections 1 et 2 est entièrement établi et homogène. Dans ces conditions, les pertes entre la section 1 et 2 sont données par la différence d'énergie hydraulique massique entre ces deux sections:

$$\begin{aligned} gH_{r1+2} &= gH_1 - gH_2 \\ &= \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right)_1 + \frac{C_1^2}{2} - \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right)_2 - \frac{C_2^2}{2} \end{aligned} \quad (1.115)$$

L'équation de continuité pour un écoulement incompressible impose:

$$C_2 = \frac{A_1}{A_2} C_1 \quad (1.116)$$

L'expression pour les pertes entre 1 et 2 devient:

$$gH_{r1+2} = \left(\frac{p_1}{\rho} - gZ_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho} - gZ_2 \right) + \left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right) \frac{C_1^2}{2} \quad (1.117)$$

Si l'on suppose que l'on a une répartition hydrostatique à la fois sur toute la section correspondant à l'élargissement brusque, les équations d'équilibre projetées selon la direction principale de l'écoulement donnent en négligeant les frottements aux parois:

$$(C_2^2 A_2 - C_1^2 A_1) = \left(\frac{p_1}{\rho} - gZ_1 \right) A_1 + \left(\frac{p_1}{\rho} - gZ_1 \right) (A_2 - A_1) - \left(\frac{p_2}{\rho} - gZ_2 \right) A_2 \quad (1.118)$$

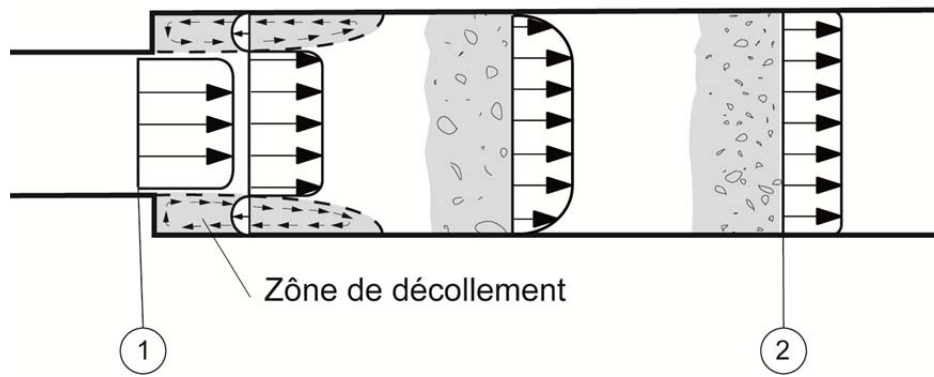


Figure 10 - Elargissement brusque

En appliquant à nouveau l'équation de continuité, on peut récrire l'expression pour les pertes sous la forme:

$$gH_{r1+2} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{C_1^2}{2} \quad (1.119)$$

Le coefficient de perte d'énergie massique singulière pour un élargissement brusque s'exprime donc par:

$$K_v = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (1.120)$$

Ce qui par exemple dans le cas de sections circulaires donne

$$K_v = \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2} \right)^2 \quad (1.121)$$

On observe dans ce cas que le coefficient de perte d'énergie massique ne dépend pas du nombre de Reynolds et ne dépend que de la géométrie du composant en l'occurrence du rapport des sections. Très fréquemment on observe une faible influence du nombre de Reynolds du moins pour des régimes établis. Cette relative indépendance vis à vis du nombre de Reynolds du coefficient de pertes est caractéristique des pertes singulières.

Si l'élargissement devient très grand alors dans ce cas la perte d'énergie massique correspond à l'énergie cinétique massique du jet

$$gH_{r1+2} = \lim_{A_2 \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{C_1^2}{2} = \frac{C_1^2}{2} \quad (1.122)$$

Bord de fuite tronqué

Le bord de fuite tronqué d'un profil provoque un cisaillement du profil des vitesses moyennes qui va générer une forte turbulence. Le mélange qui en résulte est à l'origine d'une perte d'énergie massique équivalente à celle d'un élargissement brusque.

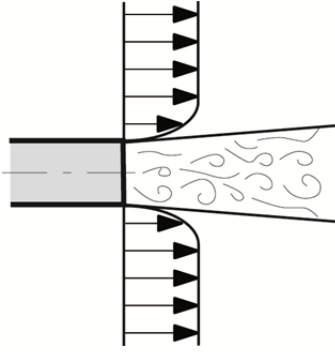


Figure 11 – Sillage turbulent d'un bord de fuite tronqué

Si $\delta A = e \times B$ représente le défaut de section du à l'épaisseur finie e du bord de fuite tronqué du profil d'envergure B . L'expression de la perte d'énergie massique prend alors la forme :

$$gH_{r1+2} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{C_1^2}{2} = \left(1 - \frac{A_2 - \delta A}{A_2}\right)^2 \frac{C_1^2}{2} = \left(\frac{\delta A}{A_2}\right)^2 \frac{C_1^2}{2} \quad (1.123)$$

Ou encore en se ramenant à l'énergie cinétique massique en sortie du profil

$$gH_{r1+2} = \left(\frac{\delta A}{A_2}\right)^2 \left(\frac{A_2}{A_2 - \delta A}\right)^2 \frac{C_2^2}{2} = \left(\frac{\frac{\delta A}{A_2}}{1 - \frac{\delta A}{A_2}}\right)^2 \frac{C_2^2}{2} \quad (1.124)$$

Décollement

De même un décollement des lignes de courant à la paroi provoque dans son sillage un fort mélange, voir Figure 12. Le décollement est provoqué par un gradient positif de pression et correspond à un frottement nul en paroi.

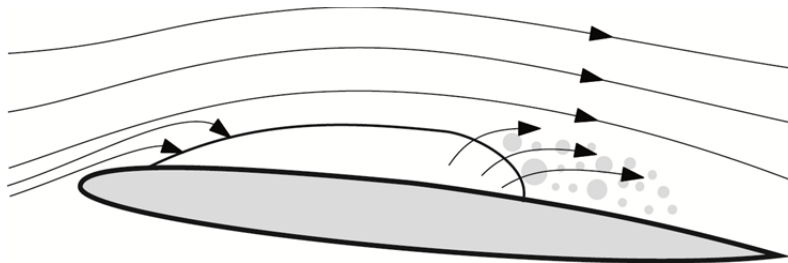


Figure 12 - Décollement sur un profil en forte incidence

3.3 Changement de direction

Conduite coudée

Dans le cas d'une forte courbure des lignes de courant un écoulement secondaire sous forme de tourbillon se crée.

L'équation d'équilibre radiale permet d'évaluer la variation transversale de la pression:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{C^2}{R} + \underbrace{\text{viscosité}}_{\text{négligeable}} \quad (1.125)$$

Le gradient de pression transversal correspondant est positif et la différence de pression qui en résulte provoque l'apparition de tourbillons qui circulent de la surpression vers la sous pression. Si l'écoulement n'est pas redressé, l'énergie cinétique massique de cet écoulement secondaire est perdue au détriment de l'écoulement moyen. Pour éviter ces pertes ou les minimiser on peut insérer une grille d'ailettes ou imposer une convergence de l'écoulement dans le coude, cas des coudes des diffuseurs de turbines hydrauliques.

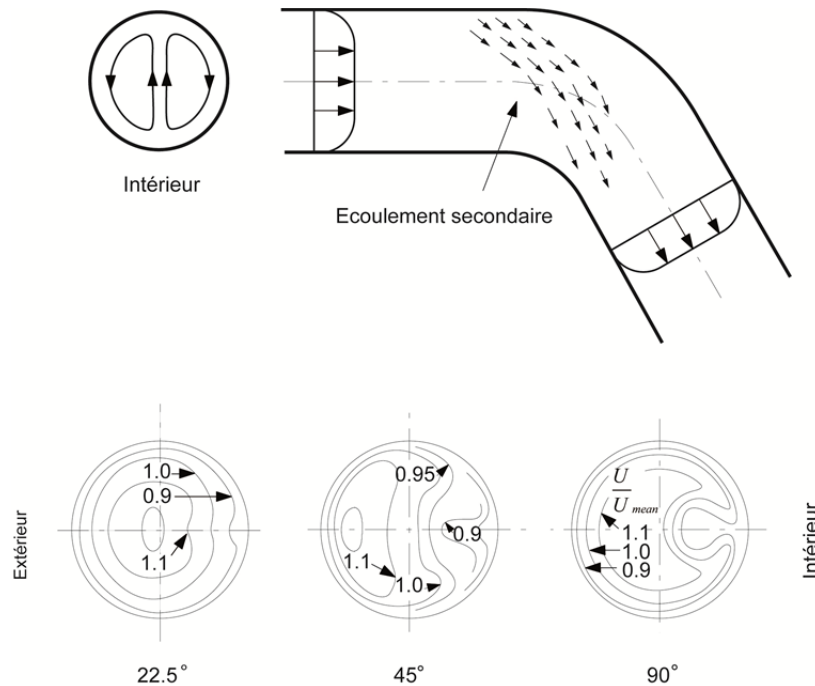


Figure 13 - Distribution de la pression dans un coude

3.4 Raccordement d'une conduite avec un grand réservoir

Toutes les formules ci-dessous sont également valables pour les conduites et ajutages à axe vertical partant du fond horizontal du réservoir ou y aboutissant.

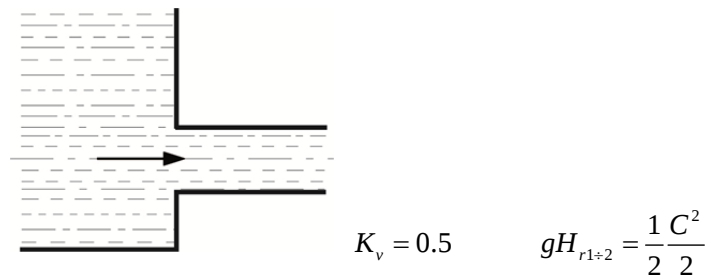
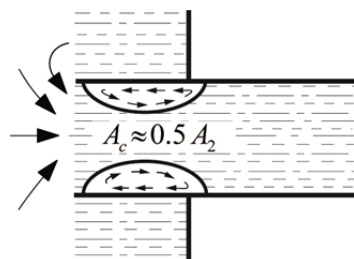
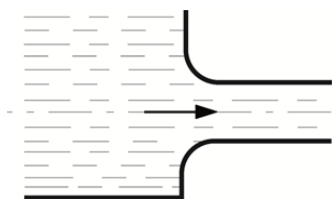


Figure 14 - Départ sans saillie à l'intérieur du réservoir, avec raccordement à angles vifs



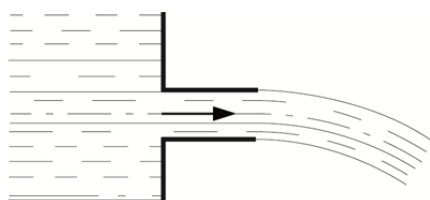
$$K_v = 1 \quad gH_{r1+2} = \frac{C^2}{2}$$

Figure 15 - Départ avec saillie à l'intérieur du réservoir



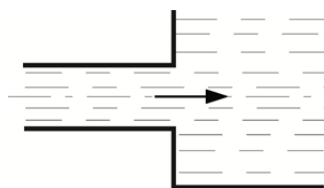
$$K_v = 0.05 \quad gH_{r1+2} = \frac{1}{20} \frac{C^2}{2}$$

Figure 16 – Départ sans saillie à l'intérieur du réservoir, avec raccordement de profil arrondi



$$K_v = 1 \quad gH_{r1+2} = \frac{C^2}{2}$$

Figure 17 – Départ sans saillie à l'intérieur du réservoir, avec raccordement à angles vifs, ajutage débitant à gueule bée.



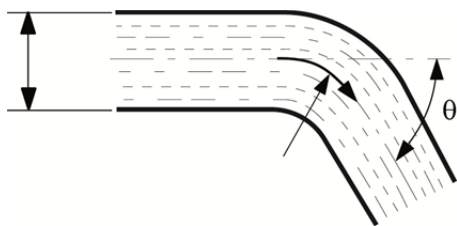
$$K_v = 1 \quad gH_{r1+2} = \frac{C^2}{2}$$

Figure 18 - Arrivée

Cette formule est valable pour le cas de la figure, mais peut s'appliquer aussi quand la conduite fait saillie à l'intérieur du réservoir ou que le raccordement présente un profil arrondi.

3.5 Coudes

Coudes arrondis



$$K_v : \text{voir ci-après}; gH_{r1+2} = K_v \frac{C^2}{2}$$

Figure 19 - Coude arrondi

K_v est donné par le Tableau 2, en fonction de

- R rayon de courbure du coude en mètres;
- D diamètre intérieur du tuyau en mètres;
- θ déviation en degrés.

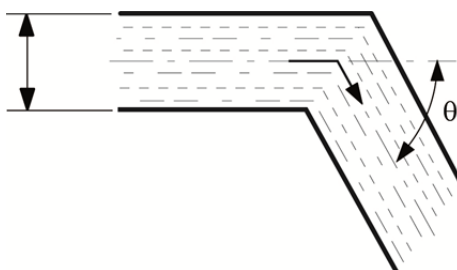
D'après la formule de Weisbach, on a:

$$K_v = \left[0.131 + 1.847 \left(\frac{d}{2r} \right)^{3.5} \right] \frac{\theta}{90}$$

Tableau 2 - Coefficient de perte d'énergie massique dans le cas d'un coude

θ r/D	1	1.5	2	2.5
11°25	0.037	0.021	0.018	0.017
22°5	0.074	0.043	0.036	0.034
30°	0.098	0.057	0.048	0.046
45°	0.147	0.085	0.073	0.069
90°	0.294	0.170	0.145	0.138
180°	0.588	0.341	0.291	0.275

Coudes à angles vifs



$$K_v : \text{voir ci-après}; gH_{r1+2} = K_v \frac{C^2}{2}$$

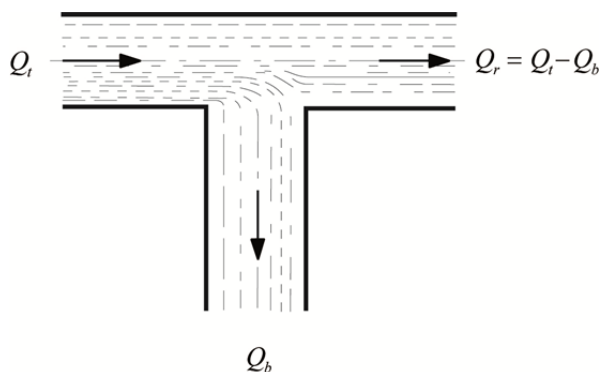
Figure 20 - Coude brusque

K_v est donné par le tableau ci-après, en fonction de la déviation θ en degrés

Tableau 3 – Coefficient de perte d'énergie massique dans le cas d'un coude brusque

$\theta(^{\circ})$	22.5	30	45	60	90
K_v	0.07	0.11	0.24	0.47	1.13

Tés (branchement à 90° de même diamètre que la conduite rectiligne, à angles vifs)



$$K_v : \text{voir ci-après; } gH_{r1+2} = K_v \frac{C_t^2}{2}$$

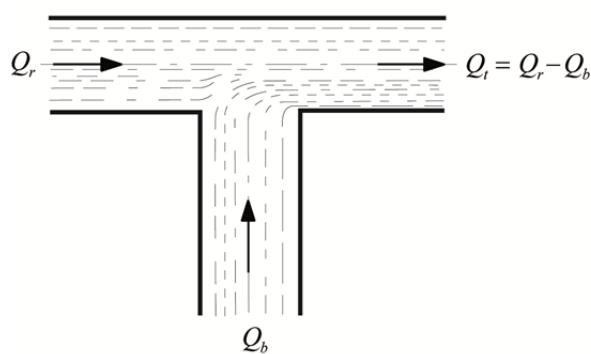
Figure 21 - Tés : Branchement de prise

K_v et gH_{r1+2} prennent chacun deux valeurs suivant que l'on considère le tuyau rectiligne de départ (K_r et gH_{r1+2}) ou le branchement (K_b et gH_{b1+2}):

- C_t est la vitesse du courant d'arrivée en mètres par seconde.
- K_r et k_b sont donnés par le tableau ci-après, en fonction de
- Q_t = débit total (débit d'arrivée) en mètres cubes par seconde.
- Q_b = débit de le branchement (débit de prise latérale) en mètres cubes par seconde.

Tableau 4 – Coefficient de perte d'énergie massique dans le cas d'un Té, branchement de prise

Q_b / Q_t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
K_r	0.04	-0.08	-0.05	0.07	0.21	0.35
K_b	0.95	0.88	0.89	0.95	1.10	1.28



$$K_v : \text{voir ci-après; } gH_{r1+2} = K_v \frac{C_t^2}{2}$$

Figure 22 - Tés : Branchement d'amenée

K_v et gH_{r1+2} prennent chacun deux valeurs suivant que l'on considère le tuyau rectiligne de départ (K_r et gH_{r1+2}) ou le branchement (K_b et gH_{b1+2}):

- C_t est la vitesse du courant d'arrivée en mètres par seconde.
- K_r et K_b sont donnés par le tableau ci-après, en fonction de
- Q_b = débit de le branchement (débit d'amenée latéral) en mètres cubes par seconde.
- Q_t = débit total (débit de départ) en mètres cubes par seconde.

Tableau 5 – Coefficient de perte d'énergie massique dans le cas d'un Té, branchement d'amenée

Q_b / Q_t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
k_r	0.04	0.17	0.30	0.41	0.51	0.60
k_b	-	-	0.08	0.47	0.72	0.91
	1.12	0.40				

3.6 Changement de section

Cônes

La perte de charge est négligeable dans un cône convergent

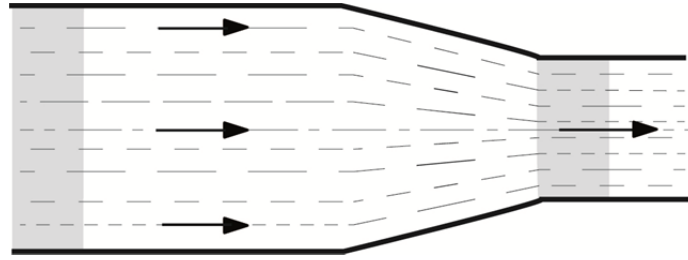
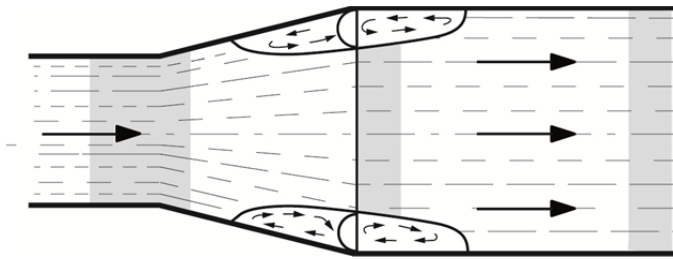


Figure 23 - Cône convergent



K_v : voir ci-après; $gH_{r1+2} = K_v \frac{C_1^2}{2}$

Figure 24 - Divergent, angle d'ouverture inférieur ou égal à 10°

C_1 étant la vitesse moyenne avant élargissement, en mètres par seconde.

$$K_v = 3.2 \left(\frac{\tan \theta}{2} \right)^{1.25} \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (1.126)$$

Avec

- D_1 diamètre intérieur de la conduite avant élargissement, en mètres;
- D_2 diamètre intérieur de la conduite après élargissement, en mètres.

Angle d'ouverture inférieur ou égal à 10°

La perte de charge est donnée par la formule ci-dessous relative aux élargissement brusques. En effet, il y a décollement des veines liquides et le phénomène devient semblable à celui qu'on observe en cas d'élargissement brusque.

Choix de l'angle d'ouverture d'un diffuseur

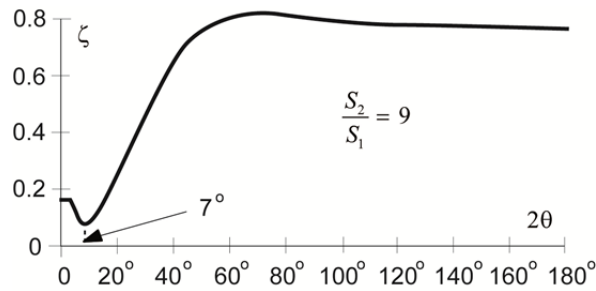
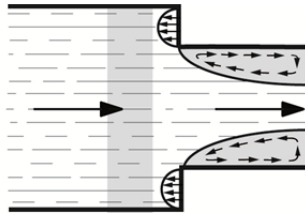


Figure 25 - Angle d'ouverture optimum pour un diffuseur

Le choix de l'angle d'ouverture d'un diffuseur conique résulte d'un compromis entre les pertes dues au frottement pariétal et les pertes dues au décollement à la paroi.

Le décollement de l'écoulement se manifeste à partir d'un angle d'ouverture de 3°, mais la longueur du diffuseur pour atteindre un rapport de section donné sera trop important. Un calcul d'optimisation conduit à une valeur optimale de l'angle d'ouverture de 7°.

Changement brusque de diamètre



$$K_v : \text{voir ci après; } gH_{r1 \rightarrow 2} = K_v \frac{C_2^2}{2}$$

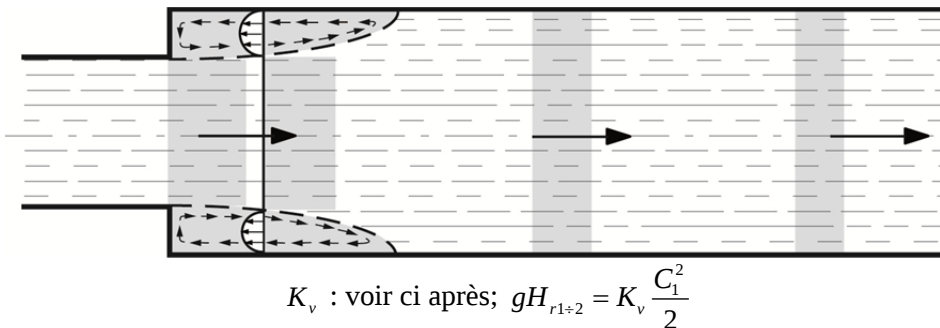
Figure 26 - Changement brusque de diamètre, rétrécissement
 C_2 étant la vitesse moyenne après rétrécissement.

K_v est donné par la formule suivante

$$K_v = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right] \quad (1.127)$$

avec

- D_1 diamètre intérieur de la conduite avant rétrécissement, en mètres;
- D_2 diamètre intérieur de la conduite après rétrécissement, en mètres.



$$K_v : \text{voir ci après; } gH_{r1 \rightarrow 2} = K_v \frac{C_1^2}{2}$$

Figure 27 - Changement brusque de diamètre, élargissement, C_1 étant la vitesse moyenne avant élargissement

K_v est donné par la formule suivante

$$K_v = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (1.128)$$

avec

- D_1 diamètre intérieur de la conduite avant élargissement, en mètres;
- D_2 diamètre intérieur de la conduite après élargissement, en mètres.

3.7 Appareil de robinetterie

Robinets-vannes

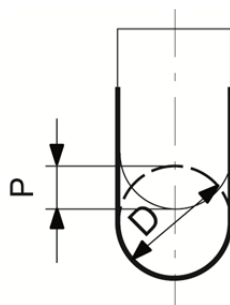


Figure 28 - Robinet-vanne

Le Tableau 6 donne des valeurs expérimentales moyennes de K_v , en fonction de:

- P distance de pénétration de l'obturateur dans la section, supposée circulaire, offerte par le robinet-vanne au passage du liquide, exprimée en mètres.
- D diamètre de cette section (diamètre intérieur du robinet-vanne), en mètres.

Tableau 6 – Coefficient de pertes d'énergie massiques d'un robinet-vanne

P/D	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
K_v	0.07	0.26	0.81	2.1	5.5	17	98

Robinets à papillon

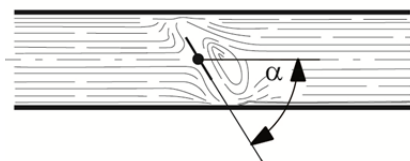


Figure 29 - Robinet à papillon

Le Tableau 7 donne des valeurs expérimentales moyennes de K_v , en fonction de:

α = angle formé par le papillon et l'axe de la conduite, en degrés.

Tableau 7 – Coefficient de pertes d'énergie massiques d'un robinet papillon

α	5	10	15	20	30	40	45	50	60	70
K_v	0.24	0.52	0.90	1.5	3.9	11	19	33	120	750

Robinet à tournant

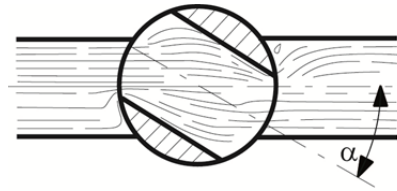


Figure 30 - Robinet à tournant

Le Tableau 8 donne des valeurs expérimentales moyennes de K_v , en fonction de α angle formé par l'axe de la lumière du boisseau - supposée à section circulaire et de même diamètre que l'intérieur du robinet - et l'axe de la conduite, en degrés.

Tableau 8 – Coefficient de pertes d'énergie massiques d'un robinet tournant

α	5	10	15	25	35	45	55	65
K_v	0.05	0.29	0.75	3.1	9.7	31	110	490

Clapets de retenue

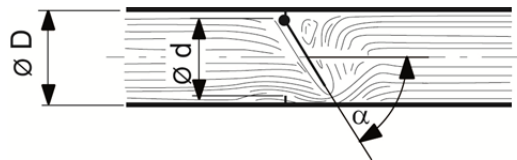


Figure 31 - Clapets de retenue

Le Tableau 9 donne des valeurs expérimentales moyennes de K_v , en fonction de α angle formé par le clapet mobile et l'axe de la conduite, en degrés;

ces valeurs de K_v s'entendent pour le cas où le diamètre de passage d du siège du clapet est égal à 0.73 fois le diamètre D de la conduite.

Tableau 9 – Coefficient de pertes d'énergie massiques d'un clapet de retenue

α	20	30	40	50	60	70	75
K_v	1.7	3.2	6.6	14	30	62	90

Robinets à soupape, à pointeau, à aiguille

Les pertes de charge dépendent trop de la conformation intérieure des appareils pour qu'on puisse donner des indications de valeur générale. Toutefois la formule de pertes de charge pour un élargissement brusque peut être appliquée pour les faibles ouvertures.

Etudions le cas particulier d'un circuit composé d'un robinet dans lequel a lieu un élargissement brusque.

La première étape est de déterminer le col, emplacement de la section minimum (cf. Figure 32). Dans cette section, la vitesse (et donc les pertes) est maximum:

$$C_{\max} = \frac{Q}{A_{\min}}$$

Les pertes dans l'élément sont alors données par:

$$gH_m = \left(1 - \frac{A_c}{A_n}\right)^2 \frac{C_c^2}{2} \quad \text{et} \quad A_c = A_c(x)$$

$$gH_m = \left(1 - \frac{A_c}{A_n}\right)^2 \frac{Q^2}{2A_c^2}$$

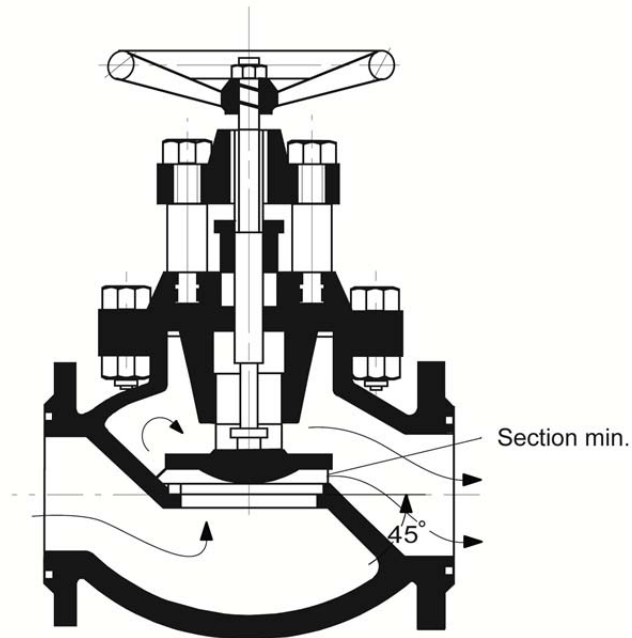


Figure 32 - Section minimale dans un robinet

Le coefficient de pertes vaut:

$$K_{vn} = \frac{gH_m}{\frac{C_c^2}{2}} = \left(1 - \frac{A_c}{A_n}\right)^2$$

En remplaçant Q par $C_{réf}A_{réf}$ on obtient:

$$gH_m = \underbrace{\left(1 - \frac{A_c}{A_n}\right)^2 \left(\frac{A_{réf}}{A_c}\right)^2}_{\kappa_{vn}} \frac{C_{réf}^2}{2}$$

$$gH_m = \kappa_{vn} \frac{C_{réf}^2}{2} \quad \text{avec} \quad \kappa_{vn} = K_{vn} \left(\frac{A_{réf}}{A_c}\right)^2$$

Les résultats obtenus sont fiables à 5% près, ce qui est suffisant pour la majeure partie des applications.

Tableau 10 - Exemples de coefficients de pertes de charges pour divers robinets :

Type de robinetterie	Coefficient de pertes K_v pour DN=					
	15	25	50	100	200	400
Robinet à bille minimum maximum	0.10 0.15	0.09 ←	0.08 ←	0.06 ←	0.04 →	0.02 0.15
	pour $d_E < DN$ $K_v = 0.4$ à 1.1 ¹⁾					
Robinet à soupape minimum	3.0 6.0	←	←	←	→	3.0 6.0
	en cas d'optimisation $K_v = 2$ à 3 peut être atteint					
Robinet à membrane minimum	0.8 2.2				0.8 2.2	
	pour BOA compact: $K_v = 0.4$ à 1.1					

- 1) d_E : diamètre de retenue, si le plus petit diamètre de retenue d_E est inférieur au diamètre nominal de raccordement, il faut augmenter les coefficients de perte K_v de $(DN/d_E)^x$, x variant de 5 à 6.

Circuit ouvert:

Un circuit ouvert se présente la façon suivante

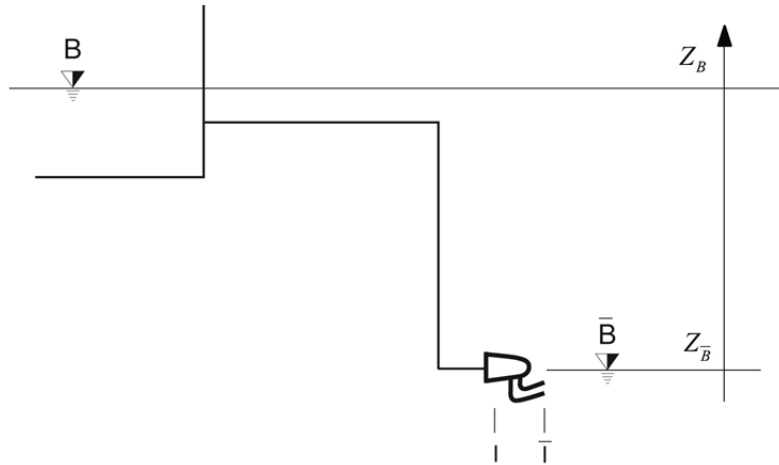


Figure 34 Schéma d'un circuit ouvert (conditions réservoir: $\frac{C^2}{2}$ négligeable)

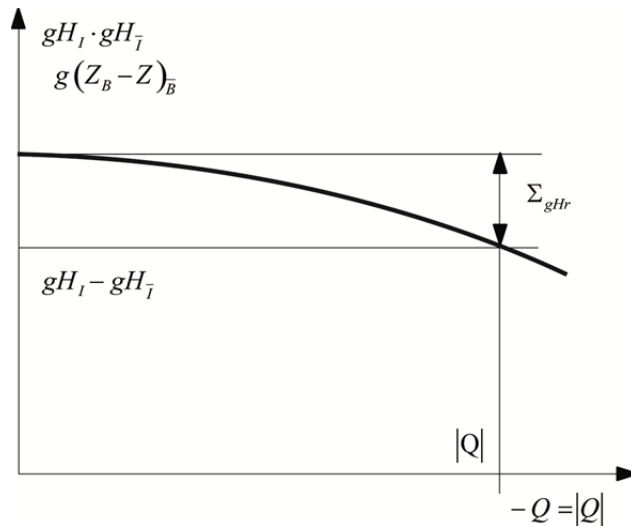


Figure 35 - Caractéristique d'un circuit ouvert (pompe)

Si les 2 réservoirs sont à surface libre on admet en négligeant le poids de la colonne d'air entre les 2 niveaux libres

$$p_{\text{amont}} = p_{\text{aval}} = p_{\text{atm.}} \quad (1.129)$$

Etablissons l'énergie disponible pour la turbomachine:

$$\begin{aligned} gH_{\text{aval}} &= gH_{\bar{I}} + gH_{\text{raval} \div \bar{I}} \\ gH_I &= gH_{\text{amont}} + gH_{\text{rI} \div \text{amont}} \end{aligned} \quad (1.130)$$

D'où l'égalité suivante:

$$gH_I - gH_{\bar{I}} = (gH_{\text{amont}} + gH_{\text{rI} \div \text{amont}}) - (gH_{\text{aval}} - gH_{\text{raval} \div \bar{I}}) \quad (1.131)$$

ou:

$$gH_I - gH_{\bar{I}} = gH_{\text{amont}} - gH_{\text{aval}} + (gH_{\text{rI} \div \text{amont}} + gH_{\text{raval} \div \bar{I}})$$

En faisant apparaître les différentes composantes de l'énergie cinétique massique totale écrite ici pour la section I:

$$gH_i = \frac{p_i}{\rho} + gZ_i + \frac{C_i^2}{2} \quad (1.132)$$

On obtient l'énergie hydraulique disponible aux limites de la machine:

$$gH_I - gH_{\bar{I}} = gZ_{amont} - gZ_{aval} + \sum gH_r \quad (1.133)$$

Dans ce type de circuit des problèmes se rencontrent à l'amorçage ou à l'arrêt, il faut une vanne d'arrêt.

Circuit fermé:

Un circuit fermé se présente la façon suivante (Figure 36):

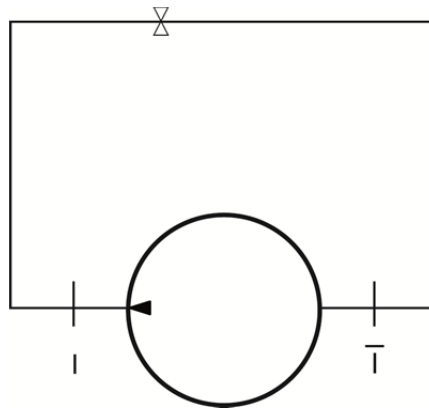


Figure 36- Schéma d'un circuit fermé

On n'a pas de condition de réservoir à surface libre (ou pression constante) à respecter

$$gH_I = gH_{\bar{I}} + gH_{rI \rightarrow \bar{I}}$$

Donc:

$$gZ_{amont} - gZ_{aval} = 0$$

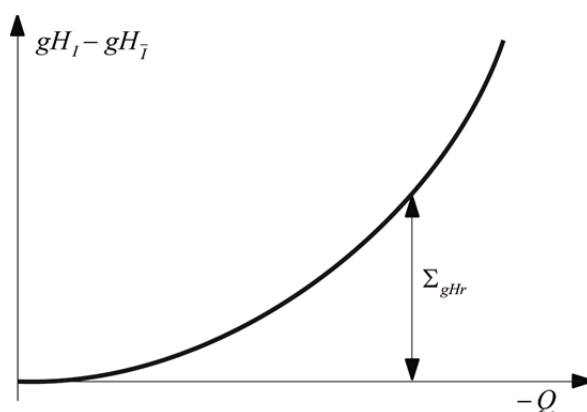


Figure 37 - Caractéristique d'un circuit fermé (pompe)

Dans ce cas-ci, n'importe quelle pompe peut être utilisée, il n'y a pas de colonne d'eau à vaincre au démarrage.

Pour une pompe

L'énergie massique à fournir est plus grande que celle de la turbine.

$$E = gH_I - gH_T = (gH_A - gH_{\bar{A}}) + \underbrace{(gH_{\bar{A} \rightarrow T} + gH_{I \rightarrow A})}_{>0} \quad (1.135)$$

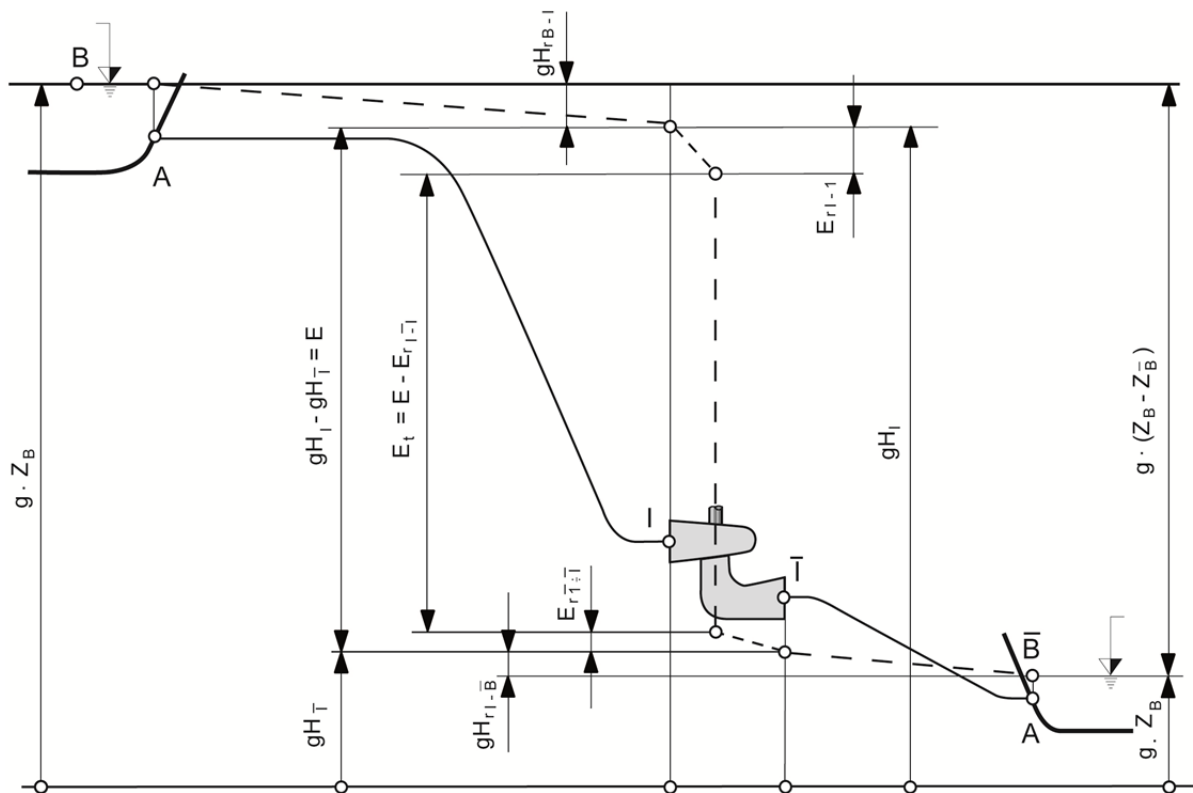


Figure 39 - Evolution de l'énergie massique dans un circuit turbine

4 ANNEXES

4.1 Turbulence

Nombre de Reynolds

Tout écoulement réel est soumis à des perturbations qui tendent à l'écarter de conditions nominales stationnaires. Le cas où, malgré ces perturbations, l'écoulement retrouve rapidement les conditions nominales correspond à une situation stable. Typiquement, les écoulements pour lesquels l'effet d'amortissement par la viscosité est fort sont stables. Dans le cas où les perturbations ne sont pas amorties, il y a instabilité et, avec l'augmentation de la vitesse, ces instabilités dégénèrent en turbulence.

C'est la fameuse expérience de Reynolds qui a mis en évidence l'existence d'une valeur critique de la vitesse au-delà de laquelle on observe la transition entre les régimes d'écoulements laminaires et turbulents dans une conduite. Le paramètre déterminant la stabilité d'un écoulement incompressible isotherme est **le nombre de Reynolds** Re défini par

$$Re = \frac{C_{\text{réf}} L_{\text{réf}}}{\nu} \quad (1.136)$$

où $C_{\text{réf}}$, $L_{\text{réf}}$ représentent respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement et ν la viscosité cinématique (pour l'eau $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ à 20°C).

Dans l'expression précédente du nombre de Reynolds, on peut faire apparaître le rapport de 2 temps caractéristiques :

$$Re = \frac{C_{\text{réf}}}{L_{\text{réf}}} \frac{L_{\text{réf}}^2}{\nu} = \frac{T_{\text{Diff}}}{T_{\text{réf}}} \quad (1.137)$$

- le temps caractéristique du mouvement $T_{\text{réf}}$;

$$T_{\text{réf}} = \frac{L_{\text{réf}}}{C_{\text{réf}}} \quad (1.138)$$

- le temps caractéristique de la diffusion moléculaire T_{diff} ;

$$T_{\text{diff}} = \frac{L_{\text{réf}}^2}{\nu} \quad (1.139)$$

Si l'on admet que $T_{\text{réf}}$ soit caractéristique du temps nécessaire au mélange de la quantité de mouvement par l'écoulement considéré, alors le nombre de Reynolds s'interprète comme une mesure de l'efficacité de ce dernier par rapport au mélange (diffusion) d'origine moléculaire.

Cette interprétation permet d'ailleurs d'introduire d'autres nombres de Reynolds tel que Re_ℓ celui associé au mélange turbulent par un tourbillon d'échelle caractéristique ℓ et de vitesse typique c' que l'on écrirait :

$$Re_\ell = \frac{\ell c'}{\nu}$$

Conservation de l'énergie cinétique massique du mouvement turbulent

D'une manière similaire à ce qui a été fait pour le mouvement moyen, on peut aussi établir l'équation de bilan de l'énergie cinétique massique e_k du mouvement turbulent qui s'écrit

$$\frac{De_k}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \overline{p' \vec{c}'} + 2\nu \overline{\vec{c}' \cdot d'} - \frac{1}{2} \overline{\vec{c}'^2 \vec{c}'} \right) + \Pi - \varepsilon \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.140)$$

où l'on voit que la variation d'énergie cinétique du champ turbulent est due :

- à la diffusion (terme de flux) moléculaire et turbulente ;

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \overline{p' \vec{c}'} + 2\nu \overline{\vec{c}' \cdot d'} - \frac{1}{2} \overline{\vec{c}'^2 \vec{c}'} \right) \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.141)$$

- au transfert d'énergie entre le mouvement moyen et le champ turbulent sous la forme du terme de **production** ;

$$\Pi = \overline{D} : \frac{\overline{\tau}_t}{\rho} = -\overline{c'_i c'_j} \frac{\partial C_i}{\partial X_j} \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.142)$$

- à la **dissipation** due à la viscosité ;

$$\varepsilon = 2\nu \overline{d'^2} \quad (\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (1.143)$$

Dissipation par la viscosité

Si l'on considère le cas d'une turbulence homogène et stationnaire en moyenne le terme de diffusion est nulle et l'équation d'énergie cinétique massique se réduit alors à :

$$0 = \Pi - \varepsilon$$

le taux de production d'énergie turbulente est approximativement égal à celui de la dissipation visqueuse. Toute l'énergie transférée de l'écoulement moyen aux fluctuations est dissipée avec le taux ε .

Dans ce cas, Il est intéressant d'examiner l'ordre de grandeur de la dissipation visqueuse du mouvement fluctuant par une évaluation du terme de production :

On peut en effet à l'aide d'une échelle caractéristique macroscopique ℓ de la turbulence (longueur de mélange) évaluer la contrainte turbulente par :

$$-\rho \overline{c'_x c'_r} \approx \rho \ell \overline{c' \frac{\partial C_x}{\partial r}} \quad (1.144)$$

où c' la fluctuation turbulente caractéristique est évaluée selon

$$e_k = \frac{3}{2} \overline{c'^2} \quad (1.145)$$

Avec cette évaluation le terme de production s'écrit

$$\begin{aligned} \Pi &\approx \ell \sqrt{\frac{2}{3} e_k} \overline{D} \\ &\approx \varepsilon = 2\nu \overline{d'^2} \end{aligned} \quad (1.146)$$

Il vient ainsi

$$\overline{d'^2} \approx \frac{\ell \sqrt{\frac{2}{3} e_k}}{\nu} \frac{\overline{D}}{2} \quad (1.147)$$

En introduisant alors Re_ℓ le nombre de Reynolds du mouvement turbulent défini par

$$Re_\ell = \frac{\ell \sqrt{\frac{2}{3} e_k}}{\nu} \quad (1.148)$$

On obtient

$$\overline{\overline{d'}}^2 \approx Re_\ell \frac{\overline{\overline{D}}^2}{2} \quad (1.149)$$

Mais à l'exception du voisinage immédiat de la paroi, le nombre de Reynolds de la turbulence Re_ℓ doit être très grand devant l'unité,

$$Re_\ell \gg 1$$

Donc la dissipation par la viscosité de l'énergie cinétique massique de la turbulence est bien plus intense que celle du mouvement moyen.

$$\overline{\overline{d'}}^2 \gg \frac{\overline{\overline{D}}^2}{2}$$

Ainsi dans ce cas particulier d'une turbulence homogène on voit que la perte d'énergie massique du mouvement moyen résulte du processus suivant :

- transfert d'énergie du mouvement moyen vers le mouvement turbulent par le terme de production de turbulence,
- puis dissipation visqueuse au sein du mouvement turbulent.

Ainsi on peut évaluer le taux de dissipation ε à l'aide de la formule de perte d'énergie massique, (1.74)

$$gH_{r1+2} = \int_V (\Phi + \Pi) \frac{\rho}{\rho Q} dV \quad (1.150)$$

Avec $\Phi \ll \Pi$ sauf peut-être au voisinage immédiat de la paroi dans la sous-couche laminaire. Avec l'hypothèse d'isotropie on a $0 = \Pi - \varepsilon$, donc il vient

$$gH_{r1+2} \approx \int_V \varepsilon \frac{\rho}{\rho Q} dV \quad (1.151)$$

Soit encore

$$\begin{aligned} \lambda \frac{8}{\pi^2} \frac{L}{D} \frac{Q^2}{D^4} &\approx \int_V \varepsilon \frac{\rho}{\rho Q} dV \\ &\approx \varepsilon \frac{\pi D^2 \cdot L}{Q} \end{aligned} \quad (1.152)$$

D'où l'estimation en fonction de λ du coefficient local de pertes d'énergie massique de la dissipation visqueuse massique par unité de temps de l'écoulement turbulent homogène dans une conduite

$$\varepsilon \approx \lambda \frac{8}{\pi^3} \frac{Q^3}{D^7} \quad (1.153)$$

Evaluation du taux de dissipation visqueuse du mouvement turbulent

Par définition le taux de dissipation de l'énergie cinétique massique du mouvement fluctuant est défini par

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2\nu \overline{d'^2} \\ &= \frac{1}{2}\nu \overline{\left(\frac{\partial c'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c'_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial c'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c'_j}{\partial x_i}\right)} \\ &= \nu \left[\overline{\frac{\partial c'^2}{\partial x_j}} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \overline{c'_i c'_j} \right]\end{aligned}\quad (1.154)$$

En tenant compte de l'hypothèse d'homogénéité du champ de vitesse fluctuant et en supposant qu'il est approximativement isotrope on peut montrer que

$$\varepsilon \approx \nu(2 + 3 \times 6) \frac{\overline{\partial c'^2}}{\partial r} = 15\nu \frac{\overline{\partial c'^2}}{\partial r} \quad (1.155)$$

Si alors on fait appel comme Taylor à une échelle λ_{Taylor} caractéristique de la dissipation visqueuse de la turbulence on écrit :

$$\frac{\overline{\partial c'^2}}{\partial r} \approx \frac{c'^2}{\lambda_{Taylor}^2} \approx \frac{2}{3} \frac{e_k}{\lambda_{Taylor}^2} \quad (1.156)$$

Alors le taux de dissipation s'évalue comme

$$\boxed{\varepsilon \approx 10\nu \frac{e_k}{\lambda_{Taylor}^2}} \quad (1.157)$$

La longueur λ_{Taylor} appelée la micro échelle de Taylor caractérise la dissipation visqueuse du champ turbulent qui est évaluée à l'aide de la vitesse caractéristique des grosses structures de la turbulence.

Pour évaluer l'échelle de ces dernières, on suppose que leur vorticité est du même ordre de grandeur que celle du mouvement moyen. Autrement dit, si c' est la vitesse caractéristique de ces structures, on devrait avoir

$$\frac{c'}{\ell} \approx \frac{\partial C_x}{\partial r} \quad (1.158)$$

Ce qui permet d'évaluer

$$\frac{c'^2}{\ell^2} \approx \overline{D}^2 \quad (1.159)$$

Parallèlement on peut aussi faire l'évaluation suivante²

$$\frac{\overline{\partial c'^2}}{\partial r} \approx \frac{c'^2}{\lambda_{Taylor}^2} \Rightarrow \frac{c'^2}{\lambda_{Taylor}^2} \approx \overline{d'^2} \quad (1.160)$$

² On montre que la micro échelle de Taylor représente aussi la courbure à l'origine de la fonction d'auto corrélation spatiale

$$R_{c'_r c'_r}(r) = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\lambda_{Taylor}^2} + o(r^4)$$

ce qui montre que λ_{Taylor} est bien une échelle microscopique.

En effet, on a

$$\frac{\ell^2}{\lambda_{Taylor}^2} = \frac{\overline{2d'^2}}{\overline{D^2}} = Re_\ell \gg 1 \quad (1.161)$$

Sachant que la dissipation visqueuse du mouvement moyen est d'un ordre de grandeur inférieur à celle du champ fluctuant, alors on a $\ell \gg \lambda_{Taylor}$, ce qui implique que la plupart des tourbillons participant à la dissipation de la turbulence ont une dimension caractéristique λ_{Taylor} d'un ordre inférieur à l'échelle ℓ des plus grosses structures.

On a ainsi une indication qu'il ne doit pas y avoir de fortes interactions entre les grosses structures de la turbulence qui gouvernent l'écoulement moyen et les structures dissipatrices qui sont d'une dimension nettement plus petite. En outre, cette faible interaction entre l'écoulement moyen et ces petits tourbillons implique que l'on doit observer aux échelles de l'ordre de λ_{Taylor} une tendance à l'isotropie (pas de direction privilégiée). Ceci justifie d'ailleurs l'hypothèse d'isotropie faite au paragraphe précédent pour évaluer le taux de dissipation ε .

Les plus petites échelles de la turbulence

On a vu que le taux moyen d'énergie dissipée par unité de masse au sein de l'écoulement turbulent est donné par ε . Ce taux est d'autant plus important que les gradients locaux de vitesses produits par l'écoulement sont intenses. L'échelle de ces gradients ou la taille des tourbillons correspondants devrait être directement liées à ce taux ε d'énergie à dissiper et à la viscosité du fluide.

Si l'on imagine ainsi le transfert ε d'énergie à partir des grosses structures (mécanisme de production) jusqu'à des structures où seuls les effets de viscosité prédominent, on peut à l'aide de l'analyse dimensionnelle déterminer l'ordre de grandeur des dimensions des structures les plus fines:

Par hypothèse la dimension (longueur caractéristique) η de ces structures ne dépend que du taux de dissipation ε de l'énergie par unité de masse et de la viscosité cinématique ν .

$$\eta = F(\varepsilon, \nu)$$

On a donc l'équation aux dimensions suivante.

$$[\eta] = [\nu^\alpha \varepsilon^\beta] \quad (m)$$

Si L et T désignent respectivement les dimensions d'espace et de temps, il vient :

$$\begin{aligned} [\eta] &= L \\ [\nu] &= L^2 T^{-1} \\ [\varepsilon] &= L^2 T^{-3} \end{aligned}$$

On doit donc avoir les relations suivantes entre les exposants:

$$\begin{aligned} 1 &= 2\beta + 2\gamma \\ 0 &= -\beta - 3\gamma \end{aligned} \quad (1.162)$$

et donc $\gamma = -\frac{1}{4}$ et $\beta = \frac{3}{4}$

On définit la micro-échelle de Kolmogorov en posant

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.163)$$

Cette micro-échelle de Kolmogorov correspond à la plus petite des dimensions de tourbillons. Pour des échelles inférieures à cette micro-échelle, la viscosité moléculaire diffuse la vorticité de manière si efficace que ces tourbillons ne peuvent subsister.

Spectre de la turbulence

Pour résumer la turbulence est alimentée en énergie au détriment du mouvement moyen à l'échelle ℓ des grandes structures alors que l'énergie est totalement dissipée à l'échelle η . Entre des deux extrêmes il y a un transfert d'énergie des plus gros aux plus petits tourbillons.

Sur la base de la tendance à l'isotropie des échelles inférieures, l'analyse dimensionnelle permet, alors, de définir les propriétés spectrales de l'énergie de la turbulence. Ce spectre, voir Figure 29, s'étend ainsi sur un domaine de nombres d'ondes compris dans l'intervalle $[1/\ell, 1/\eta]$

Si par ailleurs on suppose avec Taylor que les structures de la turbulence sont transportées par le mouvement moyen avec la vitesse C , alors, ce spectre s'étale sur une bande de fréquences comprise entre $[C/\ell, C/\eta]$.

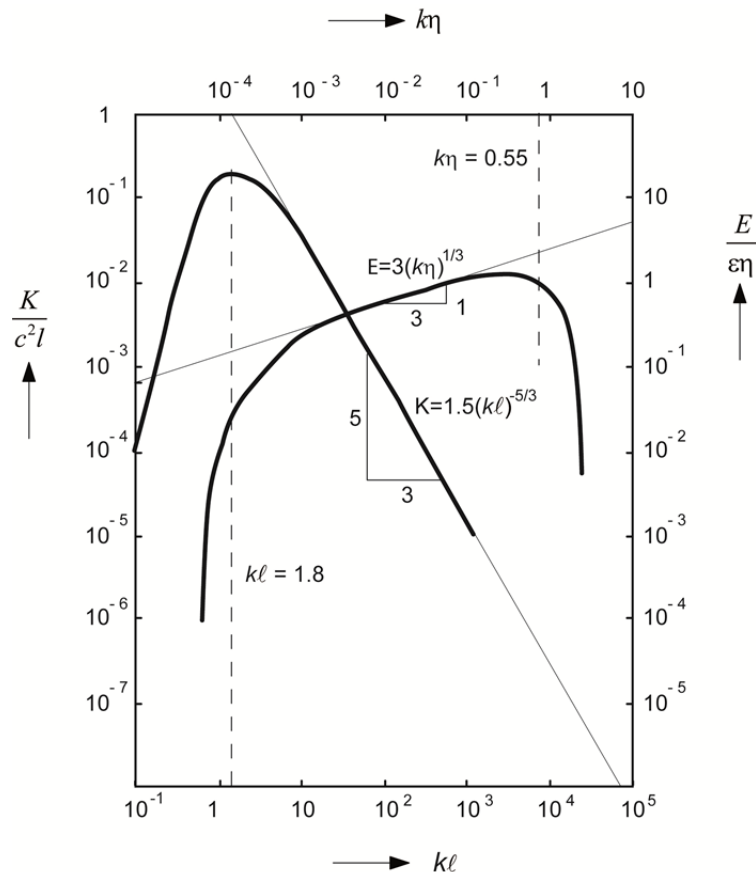


Figure 40 - Densités spectrales K et E de l'énergie cinétique massique et de la dissipation visqueuse de la turbulence (Tennekes and Lumley 1972).

4.2 Ecoulement dans une conduite de section circulaire

Ecoulement laminaire : profil de vitesse

Dans le cas d'un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique de section circulaire de rayon R , la vitesse moyenne $\vec{C}$ est axisymétrique et se réduit à une composante axiale, voir figure 30. La distribution $C(r)$ en fonction de la distance r à l'axe de la conduite se détermine à l'aide des équations de Navier-Stokes exprimées dans un système de coordonnées cylindriques $\{r, \theta, x\}$ lié à l'axe OX de la conduite.

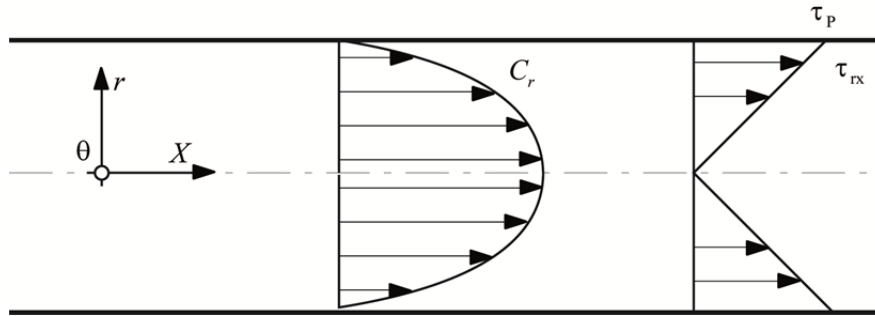


Figure 41 - Ecoulement laminaire dans une conduite cylindrique, profils de vitesse et de contraintes.

Dans ce système le champ de vitesse a pour composantes

$$\vec{C} = \begin{cases} C_r = 0 \\ C_\theta = 0 \\ C_x = C(r) \end{cases} \quad (1.164)$$

L'équation de continuité se réduit simplement à

$$\frac{\partial C}{\partial X} = 0 \quad (1.165)$$

et l'équation de Navier-Stokes à :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \\ 0 &= \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \\ 0 &= -\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.166)$$

Des deux premières composantes de l'équation de Navier Stokes, il résulte que la pression ne dépend que de la variable X

$$\frac{p}{\rho} + gZ = F(X) \quad (1.167)$$

De même on suppose que le champ de vitesse soit homogène, on peut donc écrire pour la 3^{ème} composante :

$$\frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) = \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dC}{dr} \right) = cste \quad (1.168)$$

Il en résulte que les deux termes de l'équation sont constants puisqu'ils dépendent chacun respectivement des variables indépendantes X et r .

Si on introduit la composante tangentielle de la contrainte visqueuse $\tau_{r,x}$, on a immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\tau_{r,x}}{\rho} \right) &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot v \frac{dC}{dr} \right) \\ &= \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) = cste \end{aligned} \quad (1.169)$$

La répartition radiale de la contrainte visqueuse est linéaire, voir Figure 41.

$$\tau_{r,x} = \rho \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \frac{r}{2} \quad (1.170)$$

elle atteint sa valeur maximum $\tau_{\max}$ à la paroi

$$\tau_{\max} = \rho \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \frac{R}{2} \quad (1.171)$$

ou encore en introduisant τ_p la contrainte que le fluide exerce sur la paroi

$$\tau_p = -\tau_{\max} \quad (1.172)$$

On obtient l'expression suivante

$$\tau_p = -\rho \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \frac{R}{2} \quad (1.173)$$

De même on obtient le profil de vitesse à partir de:

$$v \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dC}{dr} \right) = \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) = cste \quad (1.174)$$

qui s'intègre selon

$$\left(r \frac{dC}{dr} \right) = \frac{r^2}{2\nu} \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) + C_1 \quad (1.175)$$

soit encore

$$C = \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \frac{r^2}{4\nu} + C_1 \ln r + cste \quad (1.176)$$

Sur l'axe, la vitesse doit être définie ce qui fait éliminer le logarithme.

$$C = \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \frac{r^2}{4\nu} + cste \Rightarrow C_1 = 0 \quad (1.177)$$

A la paroi la condition d'adhérence implique que la vitesse soit nulle.

$$0 = \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \frac{R^2}{4\nu} + cste \Rightarrow cste = -\frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \frac{R^2}{4\nu} \quad (1.178)$$

Le profil de vitesse suit alors la loi parabolique bien connue, voir figure 30.

$$C(r) = \frac{-R^2}{4\nu} \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = C_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1.179)$$

La vitesse maximum $C_{\max}$ est atteinte pour $r=0$ et prend la valeur

$$C_{\max} = \frac{-R^2}{4\nu} \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \quad (1.180)$$

La vitesse débitante se calcule alors par l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{A_{A_2}} \int_{A_2} \vec{C} \cdot \vec{n} dA = \frac{C_{\max}}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr \\ &= 2C_{\max} \int_0^1 (\eta - \eta^3) d\eta = 2C_{\max} \left[\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^4}{4} \right]_0^1 = 2C_{\max} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned} \quad (1.181)$$

soit finalement

$$\begin{aligned} C &= \frac{C_{\max}}{2} \\ &= \frac{-R^2}{8\nu} \frac{d}{dX} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \\ &= \frac{R}{4\nu} \frac{\tau_p}{\rho} = \frac{D}{8\nu} \frac{\tau_p}{\rho} \end{aligned} \quad (1.182)$$

La contrainte de frottement à la paroi est proportionnelle à la vitesse débitante

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \frac{8\nu}{D} C \quad (1.183)$$

et le profil de vitesse s'exprime alors en fonction de la vitesse débitante

$$C(r) = 2C \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1.184)$$

Écoulement turbulent : distribution de contraintes

On considère l'écoulement turbulent homogène permanent dans une conduite cylindrique d'axe OX et de rayon R . Dans un tel écoulement on suppose que le champ de vitesse moyen se réduit à une simple composante axiale C_x les autres composantes étant nulles.

Dans le repère cylindrique (r, θ, x) associé à la conduite, voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**, l'équation de Reynolds s'écrit compte tenu des hypothèses d'homogénéité et de symétrie cylindrique du champ de vitesse turbulent :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) - \frac{\partial \overline{c_r'^2}}{\partial r} - \frac{\overline{c_r'^2}}{r} + \frac{\overline{c_\theta'^2}}{r} \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) \\ 0 &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\nu \frac{\partial C_x}{\partial r} - \overline{c_x' c_r'} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.185)$$

L'équation de la composante radiale s'écrit aussi

$$\frac{\partial \overline{c_r'^2}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) = -\frac{\overline{c_r'^2} - \overline{c_\theta'^2}}{r} \quad (1.186)$$

ce qui après intégration donne :

$$\overline{c_r'^2} - \underbrace{\left(\overline{c_r'^2}\right)_{r=R}}_{=0 \text{ à la paroi}} + \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) - \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right)_{r=R} = \int_R^r -\frac{\overline{c_r'^2} - \overline{c_\theta'^2}}{r} dr \quad (1.187)$$

à la paroi les fluctuations transversale s'annulent donc il vient simplement

$$\left(\frac{p}{\rho} + gZ\right)_{r=R} = \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) + \overline{c_r'^2} - \int_R^r \frac{\overline{c_r'^2} - \overline{c_\theta'^2}}{r} dr \quad (1.188)$$

Du fait de l'hypothèse d'homogénéité de la turbulence on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right)_{r=R} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) + \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\overline{c_r'^2} - \int_R^r \frac{\overline{c_r'^2} - \overline{c_\theta'^2}}{r} dr\right)}_{=0} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) \end{aligned} \quad (1.189)$$

Le variation axiale de la pression est indépendante de la position radiale et ne dépend que de x .

Si on introduit la composante tangentielle de la contrainte totale $\tau_{r,x}$, voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**, la composante axiale de l'équation de Reynolds s'écrit :

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{r,x}) \quad (1.190)$$

soit

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) \cdot r = \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{r,x}) \quad (1.191)$$

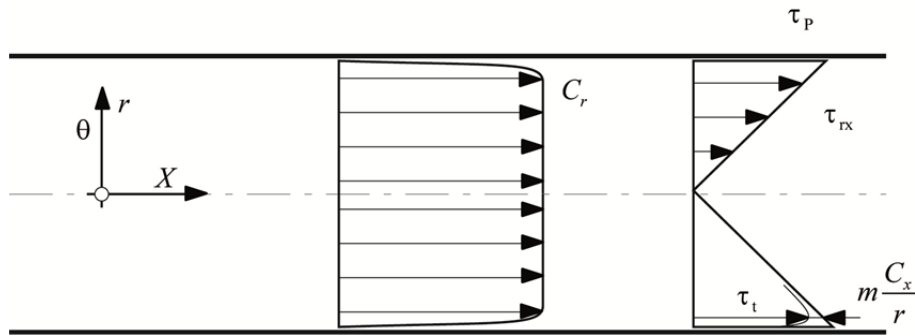


Figure 42 - Ecoulement turbulent dans une conduite cylindrique, profils de vitesse et de contraintes.

Alors, cette équation s'intègre selon

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) = \left[\underbrace{r \left(\nu \frac{\partial C_x}{\partial r} - \overline{c'_x c'_r} \right)}_{r \tau_{r,x}} \right]_R^r \quad (1.192)$$

Soit en introduisant $-\tau_p$ la contrainte exercée par le fluide sur la paroi, pour $r = R$ on a alors $\tau_{rx} = -\tau_p$.

$$\begin{aligned} r\tau_{rx} - R(-\tau_p) &= \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) \\ \tau &= \frac{R}{r}(-\tau_p) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{R^2}{r}\right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) \end{aligned} \quad (1.193)$$

Au centre de la conduite, la contrainte tangentielle doit être nulle donc il vient

$$0 = r\tau_{rx} = R(-\tau_p) + \frac{1}{2}(r^2 - R^2) \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) \quad (1.194)$$

soit encore

$$\tau_p = -\frac{R}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) \quad (1.195)$$

La contrainte à la paroi est directement proportionnelle à la variation axiale d'énergie potentielle massique

$$\tau_p = -\frac{R}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) \quad (1.196)$$

ou encore

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) = -2 \frac{\tau_p}{R} \quad (1.197)$$

et en substituant cette expression on obtient finalement

$$\begin{aligned} r\tau_{rx} &= R(-\tau_p) + \frac{1}{2}(r^2 - R^2) \left(-2 \frac{\tau_p}{R}\right) = 0 \\ r\tau_{rx} &= R(-\tau_p) - \frac{r^2}{R} \tau_p + R\tau_p \end{aligned} \quad (1.198)$$

De même que dans le cas de l'écoulement laminaire, la contrainte tangentielle totale dans d'un écoulement turbulent homogène dans une conduite cylindrique suit une distribution radiale linéaire, voir figure 31.

$$\tau_{rx} = -\overline{c'_x c'_r} + \nu \frac{\partial C_x}{\partial r} = -\frac{r}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gZ\right) = \frac{r}{R} \tau_p \quad (1.199)$$

Distribution de vitesse d'un écoulement turbulent, loi logarithmique

Pour des faibles nombres de Reynolds on a vu que le profil de vitesse dans une conduite cylindrique s'écrit sous la forme

$$C(r) = \frac{-R \tau_p}{2\nu \rho} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (1.200)$$

Dans le cas d'un écoulement turbulent les fluctuations de vitesses doivent s'annuler à la paroi par conséquent la contrainte en paroi va toujours être donnée par l'expression:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \nu \left. \frac{\partial C(r)}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (1.201)$$

Cette zone de recouvrement correspond à la condition simultanée $y^+ \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow 0$. En posant $y^+ = \varepsilon \eta$ où le petit paramètre ε permet de dilater les échelles intérieures au voisinage de la paroi on peut avoir simultanément $y^+ \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow 0$ avec ε constant.

En particulier en raisonnant sur la dérivée transversale de la vitesse

$$\frac{dC}{dy} = C_\tau \frac{d\eta}{dy} \frac{dg}{d\eta} = \frac{C_\tau^2}{\nu} \frac{d\eta}{dy^+} \frac{dg}{d\eta} = \frac{C_\tau^2}{\nu} \varepsilon \frac{dg}{d\eta} = \frac{C_\tau^2}{\nu} \frac{\eta}{y^+} \frac{dg}{d\eta} \quad (1.208)$$

et

$$\frac{dC}{dy} = C_\tau \frac{dy^+}{dy} \frac{df}{dy^+} = \frac{C_\tau^2}{\nu} \frac{dy^+}{dy^+} \frac{df}{dy^+} = \frac{C_\tau^2}{\nu} \frac{df}{dy^+} \quad (1.209)$$

Il vient ainsi

$$\frac{dC}{dy} = \frac{C_\tau^2}{\nu} \frac{\eta}{y^+} \frac{dg}{d\eta} = \frac{C_\tau^2}{\nu} \frac{df}{dy^+} \quad (1.210)$$

Ou encore

$$\frac{\eta}{y^+} \frac{dg}{d\eta} = \frac{df}{dy^+} \quad (1.211)$$

On obtient donc η

$$\eta \frac{dg}{d\eta} = y^+ \frac{df}{dy^+} = C_{ste} \quad (1.212)$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable extérieure η que celui de droite ne dépend que de la variable y^+ les deux membres ne peuvent donc n'être que constants.

D'où le résultat

$$\begin{aligned} dg = C_{ste} \frac{d\eta}{\eta} &\Rightarrow g = C_1 \ln \eta + C_2 \\ df = C_{ste} \frac{dy^+}{y^+} &\Rightarrow f = C_1 \ln y^+ + C_3 \end{aligned} \quad (1.213)$$

La condition de raccordement impose une forme logarithmique au profil de vitesse et on doit avoir

$$\begin{aligned} g(\eta) + \frac{C_{\max}}{C_\tau} &= f(y^+) \\ \frac{C_{\max}}{C_\tau} &= C_3 - C_2 + C_1 \ln \frac{C_\tau R}{\nu} \end{aligned} \quad (1.214)$$

soit finalement l'expression générale du profil de vitesse exprimée en variable intérieure

$$\frac{C}{C_\tau} = C_1 \ln \left(\frac{C_\tau y}{\nu} \right) + C_3 \quad (1.215)$$

ou en variable extérieure

$$\frac{C - C_{\max}}{C_\tau} = C_1 \ln \left(\frac{y}{R} \right) + C_2 \quad (193)$$

La constante C_1 s'identifie à la constante de Karman κ de l'ordre de 0.4 et la distribution de vitesse se met sous la forme d'une loi logarithmique universelle donnée en variables intérieures par :

$$C^+ = \frac{\ln 10}{\kappa} [\log y^+ - \log k_s^+] + B_s \quad k_s^+ < 5 \quad (1.216)$$

B_s est une constante qui ne dépend que du nombre de Reynolds k_s^+ de la rugosité k_s moyenne définie par

$$k_s^+ = \frac{C_\tau k_s}{\nu} \quad (1.217)$$

Selon les valeurs de k_s^+ on définit les régimes d'écoulement suivants:

- , un régime d'écoulement turbulent lisse correspondant à des rugosités toutes contenues dans la sous-couche visqueuse; dans ce cas on a

$$B_s = 5.5 + 5.75 \log k_s^+ \text{ ce qui implique } C^+ = 5.75 \log y^+ + 5.5$$

- $5 < k_s^+ < 70$, un régime de transition pour lequel la rugosité est de l'ordre de la hauteur de la sous-couche visqueuse;
- $70 < k_s^+$, un régime d'écoulement turbulent rugueux pour lequel les hauteurs d'aspérités sont toutes supérieures à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. Dans ce cas B_s est constant

$$B_s = 8.5 \quad C^+ = 5.75 [\log y^+ - \log k_s^+] + 8.5 \quad (1.218)$$

Si $C_{\max}$ caractérise la vitesse moyenne centrale, on peut aussi écrire

$$C_{\max}^+ = \frac{\ln 10}{\kappa} [\log R^+ - \log k_s^+] + B_s \quad (1.219)$$

D'où la loi universelle de vitesse déficitaire d'un écoulement turbulent dans une conduite cylindrique de section circulaire.

$$\frac{C_{\max} - C}{C_\tau} = \frac{\ln 10}{\kappa} \cdot \log \frac{R}{R-r} \quad (1.220)$$

Vitesse débitante

En intégrant la loi universelle de vitesse déficitaire sur toute une section de la conduite, on obtient l'expression de la vitesse débitante C en fonction de la vitesse centrale $C_{\max}$ et de la vitesse de frottement C_τ :

$$C(r) = C_{\max} - \frac{\ln 10}{\kappa} C_\tau \log \frac{R}{R-r} \quad (1.221)$$

$$C = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r C(r) dr$$

Soit en fonction de la loi de vitesse universelle:

$$C = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left[C_{\max} - \frac{\ln 10}{\kappa} C_\tau \log \frac{R}{R-r} \right] 2\pi r dr \quad (1.222)$$

ou en intégrant le terme constant.

$$C = C_{\max} - \frac{\ln 10 C_r}{\kappa R^2} \int_0^R \log \frac{R}{R-r} 2r dr \quad (1.223)$$

On effectue le changement de variable

$$\frac{r}{R} = 1 - \eta \quad (1.224)$$

qui donne $dr = -Rd\eta$ soit:

$$\begin{aligned} C &= C_{\max} - \frac{\ln 10 C_r}{\kappa R^2} \int_0^R \log \frac{R}{R-r} 2r dr \\ &= C_{\max} + \frac{\ln 10}{\kappa} C_r \int_1^0 2 \log \eta (\eta - 1) d\eta \end{aligned} \quad (1.225)$$

ou encore en intégrant par parties

$$\begin{aligned} C &= C_{\max} + \frac{\ln 10}{\kappa} C_r \int_1^0 2 \log \eta (\eta - 1) d\eta \\ &= C_{\max} + \frac{\ln 10}{\kappa} C_r \left[(\eta^2 - 2\eta) \log \xi \right]_1^0 - \frac{\ln 10}{\kappa} C_r \int_1^0 (\eta^2 - 2\eta) \frac{d\eta}{\eta \ln 10} \\ &= C_{\max} + 0 - \frac{\ln 10}{\kappa} C_r \left[\frac{\frac{\eta^2}{2} - 2\eta}{\ln 10} \right]_1^0 = C_{\max} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) C_r = C_{\max} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{-3}{2} \right) C_r \end{aligned} \quad (1.226)$$

D'où finalement on tire l'expression de la vitesse débitante

$$C = C_{\max} - \frac{3}{2\kappa} C_r \quad (1.227)$$

ou encore compte tenu de l'expression du maximum de vitesse exprimé en variables intérieures

$$C_{\max}^+ = \frac{\ln 10}{\kappa} [\log R^+ - \log k^+] + B_s \quad (1.228)$$

il vient

$$\frac{C}{C_r} = \frac{\ln 10}{\kappa} [\log R^+ - \log k^+] + B_s - \frac{3}{2\kappa} \quad (1.229)$$

Frottement à la paroi: loi implicite de Prandtl

On a établi que le frottement à la paroi est lié au gradient de pression par la relation :

$$\frac{d\left(\frac{p}{\rho} + gZ\right)}{dx} = -2 \frac{\tau_p}{R} \quad (1.230)$$

Le coefficient de frottement c_f est, par convention, défini selon:

$$\tau_p = c_f \cdot \rho \frac{C^2}{2} \quad (1.231)$$

La vitesse débitante est donnée en variable intérieure par

$$\frac{C}{C_r} = \frac{\ln 10}{\kappa} \left[\log R^+ - \log k^+ \right] + B_s - \frac{3}{2\kappa} \quad (1.232)$$

mais compte tenu de la définition du coefficient de frottement

$$\frac{C_r^2}{C^2} = c_f \Rightarrow \frac{C_r}{C} = \sqrt{c_f} \quad (1.233)$$

Il vient

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{\ln 10}{\kappa} \left[\log R^+ - \log k^+ \right] + B_s - \frac{3}{2\kappa} \quad (1.234)$$

Soit en faisant apparaître le nombre de Reynolds de la conduite on obtient avec Prandtl l'expression finale (implicite) du frottement turbulent à la paroi d'une conduite cylindrique,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{c_f}} &= \frac{\ln 10}{\kappa} \left[\log \frac{2RC}{\nu} \frac{\sqrt{c_f}}{2} - \log k^+ \right] + B_s - \frac{3}{2\kappa} \\ &= \frac{\ln 10}{\kappa} \left[\log \frac{\text{Re}}{2} \sqrt{c_f} - \log k^+ \right] + B_s - \frac{3}{2\kappa} \end{aligned} \quad (1.235)$$

Si l'on introduit λ le coefficient local de pertes d'énergie massiques de la conduite il vient alors

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{8} \ln 10}{\kappa} \left[\log \text{Re} \sqrt{\lambda} - \log k^+ - \log 2\sqrt{8} \right] + B_s - \frac{3}{2\kappa} \quad (1.236)$$

5 REFERENCES

- STREETER Victor L., WYLIE Benjamin E., *Fluid Transients in Systems*, Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1993.
- ARIS, R. (1962). *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.
- CHURCHILL, S. W., *Friction factor equation spans all fluid flow regimes*, Chem. Eng. vol.84 N°24, p.91, 1977
- COMOLET, R., *Mécanique expérimentale des fluides : Tome 2, Dynamique des fluides réels, turbomachines*, Paris : Masson, 1994 cote LMH FLUI 097/V2
- GERMAIN, P. and P. MULLER (1995). *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Paris etc., Masson.
- GREIN. H., *Quelques considérations sur la rugosité de surface des éléments mouillés des machines hydrauliques industrielles*, Bulletin Escher Wyss 1 - 1975
- IDEL'CIK I. E., *Mémento des pertes de charge. Coefficients de perte de charge singulières et de pertes de charge par frottement*, Paris : Eyrolles, 1969
- MILLER Donald S., *Internal flow system*, Cranfield : BHRA, 1990
- PONT-A-MOUSSON, *Formulaire*, Paris : Technique et documentation Lavoisier, 1989
- PUSTERLE, C. (1991). *Analyse vectorielle des champs méthodes pour la physique*. Paris etc., Masson.
- RYHMING, I. L. (2004). *Dynamique des fluides un cours de base du deuxième cycle universitaire*. Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Technique de l'ingénieur : *mécanique et chaleur, génie mécanique*, Paris : Techniques de l'ingénieur, 1990
- TENNEKES, H., and LUMLEY, J., *A First Course in Turbulence*, The MIT Press, 1972.

